

Simulazione della propagazione delle onde acustiche

Mauro Ennas

Free Report
Creative Commons 2013

Creative Commons 2013
Estratto dalla tesi di laurea 1998

Indice

1	Simulazione della propagazione	1
1.1	Il modellatore	1
1.1.1	Discretizzazione tramite differenze finite centrate	2
1.1.2	Modellazione della sorgente	3
1.1.3	Stabilità e dispersione numerica	4
1.1.4	Condizioni al contorno	5
1.1.5	Sezione sismica sintetica	7
1.2	Condizioni assorbenti.	8
1.2.1	Inversione della direzione di propagazione	9
2	Schemi per la discretizzazione temporale	13
2.1	Schemi espliciti	14
2.2	Schemi impliciti	17
2.3	Confronto tra i metodi esplicito ed implicito	20
3	Esempi di simulazione della propagazione	23
3.1	Sorgente puntiforme: campo di velocità uniforme	23
3.2	Sorgente puntiforme: discontinuità del campo di velocità	25
	Bibliografia	

Capitolo 1

Simulazione della propagazione

Risolvendo l'equazione d'onda discretizzata, avendo cura di fissare le condizioni iniziali, è possibile *simulare* numericamente la propagazione delle onde longitudinali in un volume finito al contorno del quale siano state definite delle opportune condizioni assorbenti.

La simulazione della propagazione (*modeling*) viene condotta scegliendo quelle metodiche numeriche che permettano di ottenere una precisione adeguata e tempi di calcolo ragionevoli. La scelta degli algoritmi e la loro implementazione concorrono al progetto di un modellatore per propagazione delle onde acustiche sul dominio tridimensionale (MOD3D).

1.1 Il modellatore

Il primo passo è quello di stabilire le modalità di approssimazione della derivata temporale $\ddot{P}(\mathbf{r}, t)$ e del *laplaciano* $\nabla^2 P(\mathbf{r}, t)$, quindi è necessario mettere a punto una serie di accorgimenti finalizzati alla simulazione della propagazione dell'onda all'interno di un dominio di calcolo (tipicamente bidimensionale o tridimensionale) limitato.

La sorgente del campo di pressione può essere considerata, in un primo

esempio, come costituita da un impulso di durata infinitesima $\delta(t)$, collocata in un punto ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$) all'interno del dominio considerato: scegliendo opportunamente il modello di sorgente si riesce a migliorare notevolmente la qualità delle immagini della propagazione.

È necessario fissare le condizioni di stabilità numerica dell'algoritmo e fissare le condizioni al contorno, affinché il comportamento propagatorio entro un dominio limitato emuli efficacemente la propagazione in un dominio illimitato, approssimando ragionevolmente il comportamento reale. La soluzione di queste problematiche, e di altre ancora, contribuisce alla definizione ed al progetto di un modellatore per la propagazione delle onde secondo quanto espresso nell'equazione (??).

1.1.1 Discretizzazione tramite differenze finite centrate

L'approssimazione alle differenze finite centrate della derivata seconda nel tempo può esprimersi nel modo seguente ¹:

$$\ddot{P}(x, z, t) = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \{P(i, k, n + 1) - 2 \cdot P(i, k, n) + P(i, k, n - 1)\} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (1.1)$$

con $t = n \cdot \Delta t$, e Δt è il passo della discretizzazione temporale, inoltre $x = i \cdot \Delta x$ e $z = k \cdot \Delta z$, con Δx e Δz passi della discretizzazione spaziale.

Analogamente, il laplaciano può essere approssimato tramite uno schema alle differenze finite centrate del tipo:

$$\nabla^2 P(x, z, t) \cong \frac{P(i+1, k, n) - 2 \cdot P(i, k, n) + P(i-1, k, n)}{\Delta x^2} + \frac{P(i, k+1, n) - 2 \cdot P(i, k, n) + P(i, k-1, n)}{\Delta z^2}. \quad (1.2)$$

L'equazione d'onda omogenea (priva del termine di sorgente) può essere espresso in forma ricorsiva nel modo seguente ² :

$$P_{i,k}^{(n+1)} = 2P_{i,k}^{(n)} - P_{i,k}^{(n)} + v^2 \left\{ \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[P_{(i+1),k}^{(n)} - 2P_{i,k}^{(n)} + P_{(i-1),k}^{(n)} \right] + \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \left[P_{i,(k+1)}^{(n)} - 2P_{i,k}^{(n)} + P_{i,(k-1)}^{(n)} \right] \right\}. \quad (1.3)$$

¹La derivata prima viene espressa come $\dot{P}(t) = \frac{P(t+\Delta t) - P(t-\Delta t)}{2 \cdot \Delta t}$.

²Considerando il caso particolare con velocità costante $v = v_{i,k} = \text{costante}$.

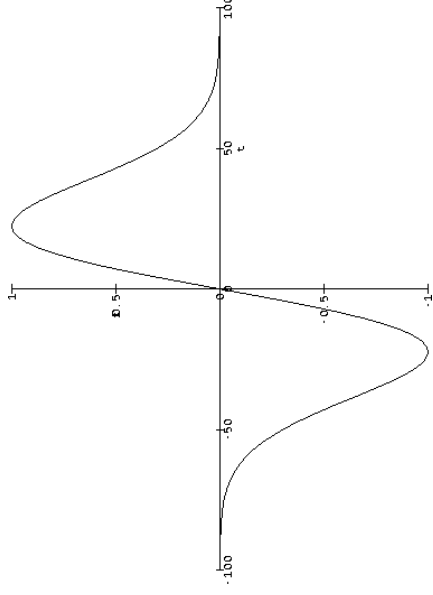


Figura 1.1: *Onda di Ricker*: $\alpha = 0.001$ e $A = 1$.

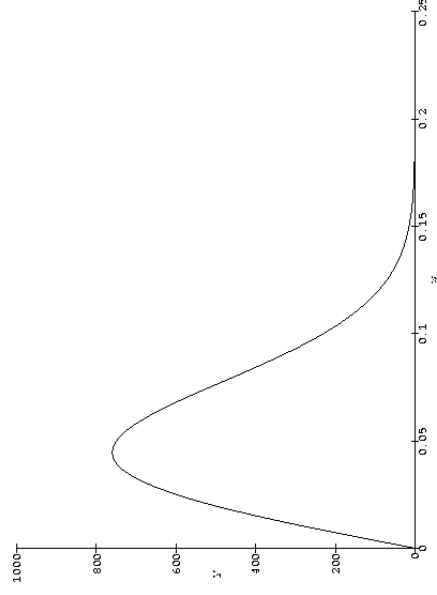


Figura 1.2: *Spettro d'ampiezza dell'onda di Ricker*.

1.1.2 Modellazione della sorgente

Prendendo spunto dall'equazione (??) nella quale il termine di sorgente può essere riscritto utilizzando una funzione limitata (*gaussiana*) e la sua derivata (*onda di Ricker*) al posto di $\delta(t)$ e $\delta'(t)$ rispettivamente, scriveremo:

$$s_{\sigma}(\mathbf{r}, t) = P_1(\mathbf{r}) \cdot e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}} + P_0(\mathbf{r}) \cdot \left(-\frac{2t}{\sigma^2}\right) \cdot e^{-\frac{t^2}{\sigma^2}}.$$

L'onda di *Ricker* (figura (1.1)) può esprimersi come segue:

$$f(t) = A \cdot t \cdot e^{-\alpha t^2} \tag{1.4}$$

nella quale α è il parametro che regola la distanza tra i due picchi (W); in particolare avremo:

$$W = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \quad (1.5)$$

Lo spettro frequenziale dell'onda di *Ricker* (figura (1.1)), ottenuto calcolandone la trasformata di *Fourier*, è il seguente:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{-i\omega}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} \cdot e^{-\left(\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)}. \quad (1.6)$$

1.1.3 Stabilità e dispersione numerica

Affinchè l'algoritmo numerico riesca a risolvere, tramite il metodo alle differenze finite, l'equazione differenziale di partenza è necessario che la soluzione sia limitata nel tempo. Una richiesta di questo tipo corrisponde, essenzialmente, ad una richiesta di stabilità della soluzione. La determinazione della condizione di stabilità in mezzi eterogenei è un problema non banale, mentre per mezzi omogenei risulta meno complicata.

Possiamo determinare, per lo schema descritto nel paragrafo §(1.1.1) (nel caso bidimensionale), la condizione di stabilità ³ nella forma seguente:

$$r_{\text{CFL}} = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \sqrt{2} \cdot V_{\text{max}} \leq 1 \quad (1.7)$$

nella quale V_{max} è la massima velocità del modello (nel caso in esame $v = \text{costante}$) e r_{CFL} viene detto *fattore di stabilità* ⁴.

³Condizioni di questo tipo sono state ottenute per la prima volta da Courant, Friedrichs e Lewy (1928).

⁴Questo tipo di condizionamento è legato al fatto che il massimo spazio fisicamente percorribile in un intervallo Δt è pari a $V_{\text{rms}} \cdot \Delta t$, mentre il minimo spazio messo a disposizione dalla discretizzazione è Δx ; pertanto si deve avere $V_{\text{rms}} \cdot \Delta t \leq \Delta x$ che rappresenta una condizione necessaria ma non sufficiente per la propagazione sul reticolo (in caso contrario potrebbero manifestarsi fenomeni di propagazione su reticolo a velocità superiori alla velocità di fase).

Se si scelgono schemi di tipo esplicito, come quello considerato nel paragrafo §(1.1.1), ciò comporta una semplificazione nell'implementazione *software* per la realizzazione di algoritmi numerici ottimizzati.

Rimane da stabilire la granularità della griglia spaziale in relazione ai problemi di dispersione numerica. La dimensione di griglia viene stabilita in termini di punti per lunghezza d'onda contenuti nello spettro dell'onda relativa alla sorgente ⁵. Per dare una tale indicazione è necessario scegliere un'onda di riferimento [2]: il numero di punti griglia viene indicato rispetto alla lunghezza d'onda relativa alla frequenza superiore (f_H) cui corrisponde la mezza potenza (*upper half-power frequency*) sullo spettro d'ampiezza della sorgente ⁶.

Ricordando che:

$$\omega_H = 2\pi f_H \quad e \quad \lambda = vT_H = \frac{v}{f_H}$$

indichiamo con $(N_x)_\lambda = \frac{\Delta x}{\lambda_H}$ il numero di punti per la lunghezza d'onda caratteristica.

1.1.4 Condizioni al contorno

L'implementazione di algoritmi alle differenze finite richiede che il modello geologico di Terra sia definito in una regione limitata dello spazio. Lo spazio nel quale ci si muove deve essere innanzitutto limitato lateralmente ed in profondità. Sulle superfici al contorno la pressione può essere posta esplicitamente a zero; in questo modo le condizioni al contorno risultano riflettenti, l'onda incidente sul bordo del dominio viene riflessa all'interno dello stesso dominio interferendo con il segnale preesistente.

⁵La discretizzazione spaziale deve essere sufficientemente fine da permettere una descrizione corretta della frequenza più elevata presente nel segnale propagato.

⁶Si è osservato [1] che i migliori risultati, per equazioni alle differenze finite di second'ordine, si ottengono con una decina di punti griglia per lunghezza d'onda, mentre per schemi di quart'ordine sono sufficienti la metà dei punti per lunghezza d'onda; ciò significa che utilizzando uno schema di quart'ordine il numero di punti griglia viene ridotto di un fattore 4, quindi il numero di operazioni in virgola mobile per passo viene ridotto del 50%.

Esistono svariati metodi per condizionare, in termini di campo di pressione, i confini del dominio di interesse, con lo scopo di minimizzare le riflessioni:

- un modo di procedere è quello di estendere il dominio di calcolo rispetto al dominio fisico di osservazione, eliminando in questo modo le interferenze dovute alle riflessioni al contorno sull'evento di interesse. È evidente che un approccio di questo tipo risulta assai dispendioso dal punto di vista computazionale, e limita i tempi di osservazione;
- esistono approcci caratterizzanti condizioni al contorno viscosi ⁷, che dissipano l'energia incidente ai bordi matematicamente;
- un modo interessante di procedere è quello di utilizzare condizioni al contorno complementari [2] ⁸, consistenti nel produrre riflessioni al bordo di opposta polarità rispetto a quelle prodotte dall'onda incidente, e nell'addizionarle coerentemente; anche in questo caso i tempi di calcolo vengono sensibilmente incrementati;
- in alcuni casi, le riflessioni indesiderate vengono eliminate mediante filtraggio frequenziale ⁹; questo approccio non si adatta a modelli troppo complicati [2].

I metodi che danno i migliori risultati sono basati sul condizionamento artificiale (condizionamento *ad hoc*).

Da più parti [5] [3] [4] vengono proposte condizioni assorbenti, in grado di permettere la propagazione al di fuori del dominio di osservazione (che vorremo, per ovvii motivi, coincidente col dominio computazionale).

Nel seguito verrà descritto un approccio basato su condizioni assorbenti e sull'inversione della direzione di propagazione dell'onda sulla frontiera del dominio computazionale.

⁷Lysmer and Kulmeyer, 1969.

⁸Smith, 1974.

⁹Kelly, 1975.

1.1.5 Sezione sismica sintetica

Nella costruzione del modello è necessario specificare il campo di velocità e la distribuzione della densità su un dominio discreto ¹⁰. La soluzione verrà generata ricorsivamente, per ogni campione temporale dell'intervallo preso in considerazione.

Se dovessimo registrare, per ogni campione temporale, i valori del campo di pressione alla superficie, potremmo ottenere un sismogramma sintetico per il nostro modello (figura (1.3)). Registrando il campo di pressione, per tutti i punti del dominio ad ogni istante, e quindi visualizzando in sequenza l'evoluzione degli effetti prodotti, si potranno evidenziare le caratteristiche di propagazione dell'onda nel modello. Fissato un istante temporale di osservazione, ogni registrazione rappresenta un'istantanea del fenomeno, e ciò risulta essere d'importante ausilio nell'interpretazione del comportamento nella propagazione delle onde. Nel caso bidimensionale in un mezzo omogeneo ed isotropo, come mostrato in figura (1.3), il fronte d'onda circolare può essere espresso nel modo seguente:

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = v^2 \cdot (t - t_0)^2$$

e la sezione sismica misurata a $z = 0$ sarà l'iperbole:

$$(x - x_0)^2 - v^2 \cdot (t - t_0)^2 = z_0^2$$

¹⁰Inoltre si deve assumere che prima dell'attivazione delle sorgenti non vi devono essere perturbazioni (sorgenti accidentali) di nessun tipo.

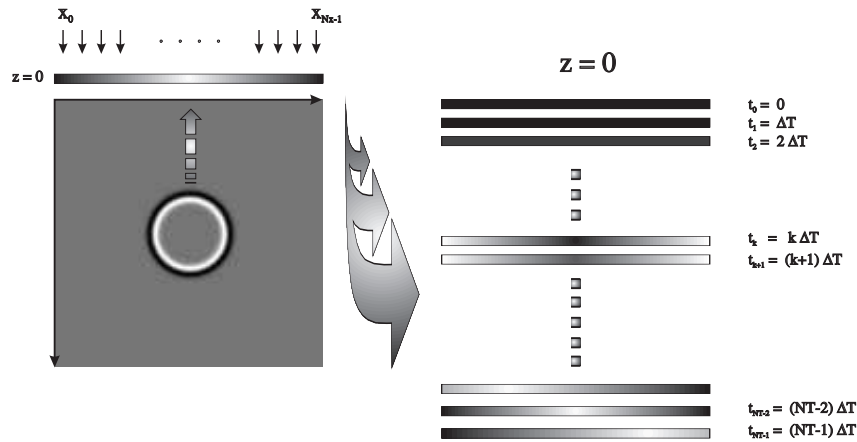


Figura 1.3: Sezione sismica sintetica.

1.2 Condizioni assorbenti.

Dal punto di vista propagatorio la Terra risulta, a differenza del suo modello matematico, fondamentalmente illimitata, sia all'interfaccia in superficie che lateralmente ed in profondità. Ciò comporta la necessità di utilizzare delle condizioni al contorno che permettano di simulare un comportamento propagatorio prossimo a quello reale.

Clayton ed Engquist nel 1977 hanno proposto un metodo di rimpiazzamento dell'equazione d'onda completa [5], in prossimità dei confini del dominio, con la sua approssimazione parassiale ¹¹. L'utilizzo dell'approssimazione parassiale assicura la propagazione in una direzione preferenziale (*one-way*) al bordo del modello.

Tale direzione, tipicamente, coincide con un asse spaziale; in questo modo un'onda incidente normalmente ad una parete assorbente del modello, può essere attenuata nel modo desiderato, ma se incide con un certo angolo $\phi \neq 0$ (rispetto alla normale al piano d'incidenza) l'assorbimento sarà tanto minore quanto maggiore è l'angolo ($\phi \leq 90^\circ$).

Nel nostro caso abbiamo considerato una zona di assorbimento di larghezza variabile su un dominio bidimensionale ¹² (figura (1.4)). Le bande η nella direzione orizzontale, ω (superficie) e ξ (fondo) in quella verticale in-

¹¹Le approssimazioni parassiali vengono trattate nel paragrafo §(??).

¹²Il dominio dell'implementazione è tridimensionale.

dividuoano univocamente tale dominio di assorbimento. Ciò permette di intrappolare l'energia nel dominio di assorbimento, imponendo un'evoluzione parassiale sulla linea più esterna di tale dominio e su quella adiacente. L'applicazione dell'inversione del segno sulla derivata ¹³ prima temporale del campo di pressione determina, di fatto, l'inversione della direzione di propagazione locale del campo d'onda, attraverso l'inversione del segno della densità di potenza $j = \partial_t P \nabla P \cdot \mathbf{n}$ nella direzione normale alla frontiera del dominio.

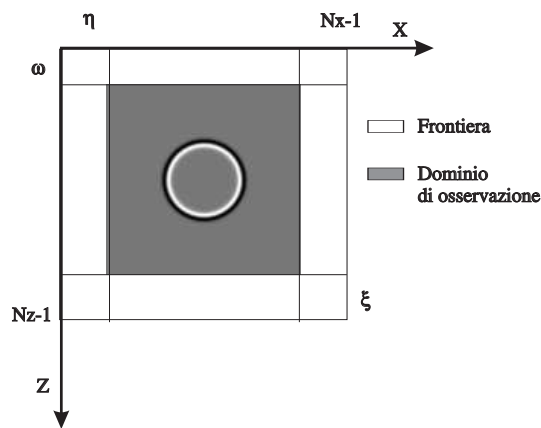


Figura 1.4: Frontiera del dominio di calcolo nel caso bidimensionale.

1.2.1 Inversione della direzione di propagazione

Per trattare le condizioni al contorno assorbenti possono essere adottati svariati approcci; nel nostro caso seguiremo un'approccio che impone un'inversione del segno delle onde riflesse alla frontiera, coadiuvato da un accorgimento che permetta la propagazione in una direzione preferenziale, in grado di accentuare l'effetto desiderato di assorbimento al contorno. Si tratta di considerare il problema della propagazione al bordo come un semplice problema di riflessione nel quale l'onda incide su un ostacolo (la

¹³Quanto più è efficiente l'inversione del segno tanto meno l'equazione parassiale dovrà essere accurata (nel nostro caso sono sufficienti i primi due termini dello sviluppo di Taylor).

frontiera del dominio) e viene in parte riflessa all'indietro ed in parte trasmessa.

Implementare le condizioni assorbenti significa eliminare la riflessione delle onde alla frontiera, permettendo una propagazione guidata verso l'esterno del dominio di osservazione. Ciò che si vuole ottenere è una simulazione realistica della propagazione in un dominio illimitato (molto più esteso del dominio computazionale) a partire da domini computazionali ridotti.

Generalmente si tende a considerare domini computazionali più estesi del dominio effettivo di osservazione. Questo modo di procedere implica una mole di calcoli addizionale rispetto alla quantità di dati che effettivamente dovranno essere visualizzati, ed inoltre dipende fortemente dai tempi di osservazione ¹⁴. Ciò che è stato realizzato è un sistema di monitoraggio della direzione di propagazione attraverso la valutazione del segno del vettore $\mathbf{j} = \dot{P} \cdot \nabla P$ nella direzione normale alla frontiera, che ci permette di invertire la direzione locale di propagazione dell'onda qualora essa venga riflessa ($\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} < 0$) alla frontiera del dominio ¹⁵.

Consideriamo un volume limitato V , possiamo definire un vettore che tenga conto delle variazioni del flusso di energia nel tempo, all'interno dello spazio considerato:

$$\mathbf{j} = \frac{\partial P}{\partial t} \nabla P. \quad (1.8)$$

Consideriamo un'onda viaggiante nel verso concorde alle x crescenti (da sinistra verso destra in figura (1.5)). Il gradiente in direzione orizzontale sarà positivo, così pure la derivata temporale (propagazione diretta per tempi crescenti). La discontinuità produce una riflessione dell'onda viaggiante, cioè un cambiamento nella direzione di propagazione e dunque una variazione del segno del vettore \mathbf{j} . Valutando la derivata spaziale, localmente, in un intorno della frontiera del dominio, si riesce a calcolare la direzio-

¹⁴Non si deve permettere all'onda incidente sulla frontiera del dominio computazionale esteso di rientrare nel dominio di osservazione, vanificando i nostri propositi.

¹⁵Questo modo di procedere evita che la componente riflessa si sommi in controfase con l'onda incidente, degradando l'informazione legata alla propagazione; tutto ciò senza estendere il dominio di calcolo ma operando come se fosse illimitato.

ne di propagazione e si riesce a stabilire se l'onda ha direzione entrante o uscente, rispetto alla normale alla superficie che racchiude il dominio di calcolo: in caso di onda entrante nel dominio si cambia il segno del vettore \mathbf{j} componente per componente, inducendo un cambiamento di segno nella derivata temporale dell'onda riflessa alla frontiera del dominio.

In sintesi:

$$\text{se } \mathbf{j} = \frac{\partial P}{\partial t} \nabla P \cdot \mathbf{n} < 0 \quad \text{allora} \quad \frac{\partial P}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial P}{\partial t}.$$

L'accesso diretto al termine $\frac{\partial P}{\partial t}$ viene consentito dall'algoritmo d'integrazione temporale *leap frog*. In questo modo, riusciamo ad "intrappolare l'ener-

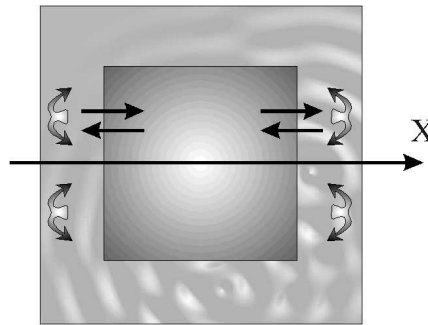


Figura 1.5: Propagazione parassiale: direzione orizzontale.

gia" in una cornice sulla frontiera del dominio di calcolo; il passo successivo sarà quello di convogliare tale energia verso l'esterno del dominio, ciò tramite l'uso dell'equazione parassiale. Infatti la variazione spaziale nelle tre direzioni espressa tramite il gradiente ∇P e la variazione temporale $\partial P/\partial t$ del campo di pressione sono legate dall'equazione:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = v (\nabla P \cdot \mathbf{n}) \quad (1.9)$$

che esprime la cosiddetta *equazione di propagazione parassiale*; in particolare nella direzione orizzontale avremo:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = +v \frac{\partial P}{\partial x} & \mathbf{n} \equiv \mathbf{i}_x \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} & \mathbf{n} \equiv -\mathbf{i}_x \end{cases} \quad (1.10)$$

In questo modo forziamo la propagazione in una sola direzione, verso l'esterno del dominio. Si ottiene così un effetto di assorbimento in tutte le

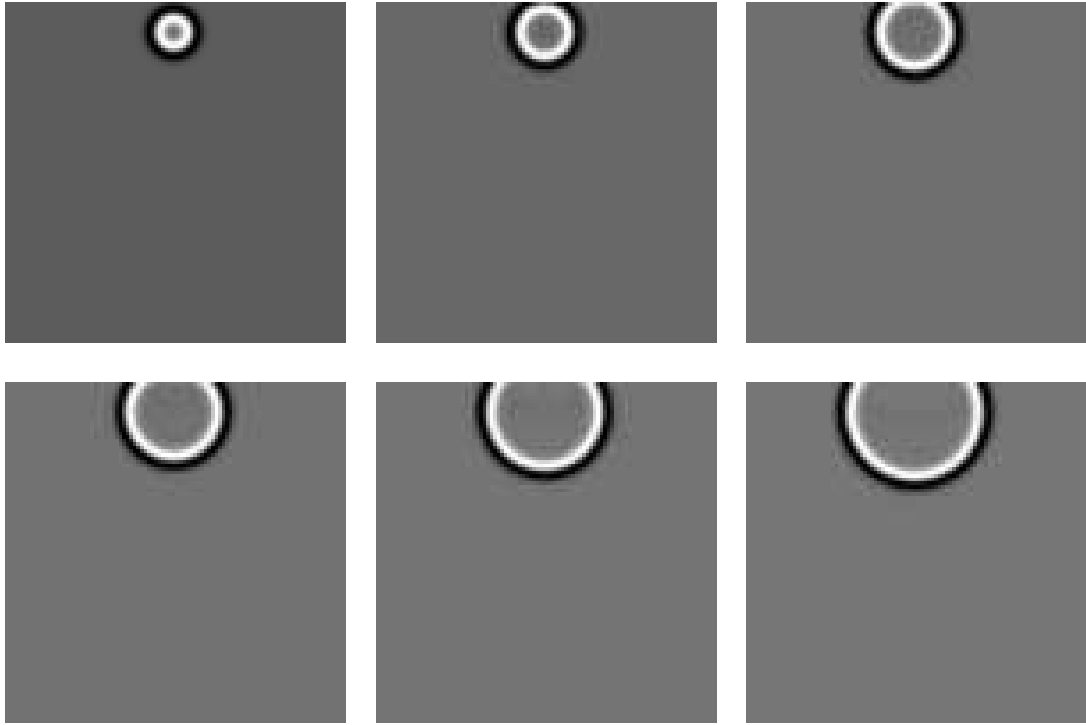


Figura 1.6: Esempi di propagazione in presenza di condizioni al contorno assorbenti.

direzioni e si risolve, a meno di dispersioni numeriche dovute alla discretizzazione del reticolo, il problema posto in un tempo di calcolo minimo. Nella figura (1.5) sono riassunte schematicamente le considerazioni svolte per la determinazione delle condizioni assorbenti; osserviamo che ad un certo istante possiamo pensare di avere sovrapposizione, alla frontiera, di onde entranti (riflesse) e di onde uscenti sovrapposte: la direzione di propagazione verrà valutata ed eventualmente invertita per ogni punto appartenente al sottodominio di frontiera. Dobbiamo sottolineare che la frontiera per la determinazione delle derivate spaziali ha uno spessore maggiore di quella usata per implementare la propagazione parassiale, ad esempio per $N_x = 64$ sono sufficienti quattro punti di spessore per il *test* sul segno di $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ e due punti per imporre la propagazione *one-way*. In figura (1.6) viene mostrato un esempio di propagazione del fronte d'onda in prossimità della frontiera del dominio di calcolo.

Capitolo 2

Schemi per la discretizzazione temporale

Consideriamo l'equazione scalare delle onde:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

nel semplice caso in cui $P = P(x, t)$. Cio' che vogliamo ottenere è una relazione per la condizione di stabilità, per gli schemi d'integrazione temporale. La discretizzazione spazio-temporale dell'equazione iperbolica sarà del tipo $x = i\Delta x$, $t = n\Delta t$, per $i, n \in \mathcal{N}$, con $P(i\Delta x, n\Delta t) = P(i, n)$. Una semplice approssimazione alle differenze finite per l'equazione (2.1) porta a:

$$\frac{P(i, n+1) - 2P(i, n) + P(i, n-1))}{\Delta t^2} = v^2 \cdot \frac{P(i+1, n) - 2P(i, n) + P(i-1, n))}{\Delta x^2} \quad (2.2)$$

che può essere scritta nella forma:

$$P(i, n+1) - 2P(i, n) + P(i, n-1) - \rho \cdot [P(i+1, n) - 2P(i, n) + P(i-1, n)] = 0 \quad (2.3)$$

con

$$\rho = v^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2.$$

2.1 Schemi espliciti

Supponiamo di dovere risolvere l'equazione scalare delle onde date le condizioni al contorno iniziali ¹. Possiamo riscrivere l'equazione (2.2) in modo tale da esplicitare il valore al passo temporale $(n + 1)$ -*imo* rispetto ai passi precedenti, nel modo seguente:

$$P(i, n + 1) = 2[1 - \rho] \cdot P(i, n) + \rho \cdot P(i + 1, n) + \rho \cdot P(i - 1, n) - P(i, n - 1) \quad (2.4)$$

sempre con $\rho = v^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$. Effettuando la decomposizione spettrale ²

$$\hat{P}(k_x, n) = \sum_i P(i, n) \cdot e^{-jk_x \cdot i \Delta x}, \quad (2.5)$$

nello spazio di *Fourier* avremo un'espressione del tipo ³:

$$\hat{P}(k_x, n + 1) - 2 \left[1 - 2\rho \cdot \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right] \hat{P}(k_x, n) + \hat{P}(k_x, n - 1) = 0. \quad (2.6)$$

Posto

$$\Xi(k_x, \rho) = 1 - 2\rho \cdot \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right), \quad (2.7)$$

possiamo semplificare l'espressione (2.6) nel modo seguente:

$$\hat{P}(k_x, n + 1) - 2 \cdot \Xi(k_x, \rho) \cdot \hat{P}(k_x, n) + \hat{P}(k_x, n - 1) = 0. \quad (2.8)$$

Una tale equazione alle differenze finite, rispetto alla variabile temporale, ha un'equazione caratteristica associata del tipo:

$$\lambda^2 - 2 \cdot \Xi(k_x, \rho) \cdot \lambda + 1 = 0, \quad (2.9)$$

¹Ciò significa specificare il valore della funzione $P(x, t)$ nei punti alla frontiera $\partial\Omega_x$ del dominio spaziale $\Omega_x \equiv [a, b]$ con $x \in \Omega_x$, ed inoltre l'insieme di valori $P(x, t = 0)$ per ogni $x \in \Omega_x$; questo corrisponde fisicamente a specificare il profilo iniziale del campo di pressione dal quale fare evolvere la soluzione.

²Ciò implica, com'è noto, l'imposizione della periodicità della funzione che deve essere trasformata.

³Considerando

$$2 \cdot \cos(\theta) = e^{j\theta} + e^{-j\theta},$$

ed inoltre

$$1 - \cos(\theta) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

a partire dalla quale possono essere determinate le due radici

$$\lambda_{1,2} = \Xi \pm \sqrt{\Xi^2 - 1}, \quad (2.10)$$

le quali concorrono alla determinazione dell'equazione omogenea, nel modo seguente:

$$\hat{P}(k_x, n) = a_1 \cdot [\lambda_1(k_x, \rho)]^n + a_2 \cdot [\lambda_2(k_x, \rho)]^n. \quad (2.11)$$

Dobbiamo considerare i tre casi seguenti:

$$\Xi^2 - 1 \begin{cases} > 0 & \lambda_1 \neq \lambda_2, & \text{radici reali e distinte} \\ = 0 & \lambda_1 = \lambda_2, & \text{radici reali e coincidenti} \\ < 0 & \lambda_1 = \lambda_2^*, & \text{radici complesse coniugate} \end{cases} \quad (2.12)$$

Perchè si abbia incondizionata stabilità deve aversi $|\lambda| \leq 1$ per ogni valori di v , Δx , Δt . Posto $|\lambda| \leq 1$, se $\Xi^2 - 1 < 0$ avremo soluzioni oscillanti, mentre se $\Xi^2 - 1 \geq 0$ avremo soluzioni costanti o decrescenti nel tempo. Essendo

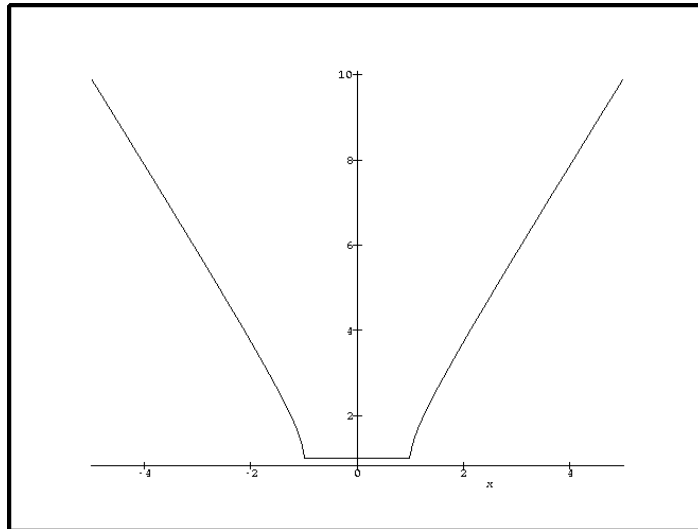


Figura 2.1: Modulo massimo degli autovalori λ .

$$1 - 2\rho \leq \Xi \leq 1 \quad (2.13)$$

è possibile graficare il modulo massimo degli autovalori $\max_i(|\lambda_i|)$, come mostrato in figura (2.1) ed osservare che $\max_i(|\lambda_i|) \leq 1$ se e solo se il coefficiente di stabilità soddisfa la condizione:

$$r_{CFL} = v \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.14)$$

Nel caso N -dimensionale ⁴ (con $\Delta x = \Delta x_1 = \dots = \Delta x_n$), per lo stesso schema, si ricava una condizione di stabilità del tipo:

$$r_{CFL} = v \cdot \sqrt{N} \cdot \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq 1. \quad (2.15)$$

In modo alternativo l'equazione (2.8) può essere espressa in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \hat{P}(k_x, n+1) \\ \hat{P}(k_x, n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \cdot \Xi(k_x, \rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}(k_x, n) \\ \hat{P}(k_x, n+1) \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

ed inoltre ponendo

$$U_n(k_x) = \begin{bmatrix} \hat{P}(k_x, n) \\ \hat{P}(k_x, n+1) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \cdot \Xi \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

possiamo scrivere l'equazione (2.8) in forma vettoriale ⁵

$$U_{n+1}(k_x) = \mathcal{A}(k_x, \rho) U_n(k_x) \quad (2.18)$$

e procedendo per induzione ⁶ ottenere

$$U_n = \mathcal{A}^n U_0. \quad (2.19)$$

Per valutare la potenziale crescita dell'errore supponiamo, invece di specificare U_0 esattamente di indicare un valore approssimato V_0 , affetto da un errore $e_0 = U_0 - V_0$. Per il passo j -imo avremo che

$$e_j = \mathcal{A}^j e_0.$$

Lo schema risulta stabile se e_j rimane limitata per $j \rightarrow \infty$. Supposto x_s l' s -imo autovettore della matrice \mathcal{A} e λ_s l' s -imo autovalore, in generale

⁴Nel caso di differenze finite centrate.

⁵Il pedice riferisce la discretizzazione temporale.

⁶Infatti:

$$U_{n+1} = \mathcal{A} U_n = \mathcal{A} [\mathcal{A} U_{n-1}] = \mathcal{A} \{ \mathcal{A} [\mathcal{A} U_{n-2}] \} = \dots = \mathcal{A}^{j+1} U_{n-j} = \dots = \mathcal{A}^{n+1} U_0.$$

ciascun vettore ed in particolare il vettore iniziale di errore, può essere scritto come una combinazione lineare di autovalori (essendo la matrice di rango massimo) con coefficienti c_s :

$$\mathbf{e}_0 = \sum_s c_s \cdot \mathbf{x}_s$$

pertanto si avrà:

$$\mathbf{e}_j = \sum_s c_s \cdot \lambda_s^j \cdot \mathbf{x}_s.$$

Affinchè l'errore resti limitato è necessario che gli autovalori della matrice \mathcal{A} siano in modulo minori dell'unità ⁷. La caratteristica principale degli schemi espliciti di integrazione stà nel fatto che il passo della discretizzazione temporale può essere controllato in modo tale da mantenere la stabilità della soluzione dell'equazione iperbolica delle onde acustiche: comunque è possibile derivare schemi incondizionatamente stabili, cioè stabili per ogni valore di ρ . È importante sottolineare che avere uno schema incondizionatamente stabile non implica in alcun modo ipotesi sull'accuratezza. È anche possibile derivare metodi alle differenze finite nei quali i vincoli su ρ dipendono solo dall'accuratezza desiderata e non dalla stabilità.

2.2 Schemi impliciti

Consideriamo come esempio particolare il metodo di *Crank-Nicholson*. Esso consiste nel valutare le derivate seconde spaziali dell'equazione delle onde nei punti di mezzo della griglia temporale tramite una interpolazione agli istanti $(n-1)$ -imo ed $(n+1)$ -imo:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) \simeq \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{P_{i+1}^{(n-1)} - 2P_i^{(n-1)} + P_{i-1}^{(n-1)}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1}^{(n+1)} - 2P_i^{(n+1)} + P_{i-1}^{(n+1)}}{\Delta x^2} \right]. \quad (2.20)$$

⁷Il raggio spettrale, il modulo massimo degli autovalori non nulli, deve essere minore uguale ad uno.

Sostituendo nell'equazione d'onda si trova:

$$\begin{aligned} P(i, n+1) - 2P(i, n) + P(i, n-1) = \\ \rho_1 [P(i+1, n+1) - 2P(i, n+1) + P(i-1, n+1) + \\ P(i+1, n-1) - 2P(i, n-1) + P(i-1, n-1)] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\text{con } \rho_1 = \left(v^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \right).$$

Quest'ultimo schema è un'esempio di schema implicito in quanto l'equazione alle differenze finite che lo caratterizza definisce la soluzione ad ogni passo implicitamente in termini della soluzione di un sistema lineare di equazioni.

Per effettuare l'analisi della stabilità supponiamo che P sia periodica e calcolando la trasformata di *Fourier* dell'equazione (2.21) avremo:

$$[1 - 2\rho_1 - 2\rho_1 \cdot \cos(\theta)] \cdot \hat{P}(k_x, n+1) + [1 - 2\rho_1 - 2\rho_1 \cdot \cos(\theta)] \cdot \hat{P}(k_x, n-1) = 0. \quad (2.22)$$

$$\text{con } \theta = k_x \cdot i\Delta x.$$

L'equazione caratteristica avrà la seguente forma:

$$[1 - 4\rho_1 \cdot \sin^2(\theta/2)] \cdot \mu^2 + [1 - 4\rho_1 \cdot \sin^2(\theta/2)] \cdot \mu = 0 \quad (2.23)$$

che porta ad uno schema incondizionatamente stabile in quanto gli autovalori $\mu = \pm j$, con $|\mu| = 1$ ovunque. Uno schema del tipo (2.20) è un caso particolare dello schema più generale ($\alpha \in [0, 0.5]$):

$$\alpha \cdot \left[\frac{P_{i+1}^{(n-1)} - 2P_i^{(n-1)} + P_{i-1}^{(n-1)}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i+1}^{(n+1)} - 2P_i^{(n+1)} + P_{i-1}^{(n+1)}}{\Delta x^2} \right] + (1 - 2\alpha) \cdot \frac{P_{i+1}^{(n)} - 2P_i^{(n)} + P_{i-1}^{(n)}}{\Delta x^2}. \quad (2.24)$$

per $\alpha = 0.5$; in generale lo schema (2.24) sarà esplicito per $\alpha = 0$, implicito negli altri casi. L'equazione (2.24) potrà essere espressa in forma matriciale nel modo seguente:

$$\mathcal{A}_1 \begin{bmatrix} \hat{P}(k_x, n+1) \\ \hat{P}(k_x, n+2) \end{bmatrix} = \mathcal{A}_2 \begin{bmatrix} \hat{P}(k_x, n) \\ \hat{P}(k_x, n+1) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

dove \hat{P} rappresenta la trasformata di *Fourier* di P . In forma compatta, possiamo scrivere, analogamente a quanto visto in precedenza:

$$\mathcal{A}_1 U_{n+1} = \mathcal{A}_2 U_n, \quad (2.26)$$

$$U_{n+1} = \mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2 U_n. \quad (2.27)$$

Perchè si abbia stabilità è sufficiente che gli autovalori della matrice $(\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2)$ abbiano modulo minore o uguale a uno. Calcolando $\mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2$, otteniamo:

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1^{-1} \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{2-(1-2\alpha)\cdot\Lambda}{1+\alpha\cdot\Lambda} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

i cui autovalori possono essere calcolati tramite l'equazione caratteristica $f(\mu) = 0$ a partire dalla forma seguente:

$$f(\mu) = \det[\mathcal{B} - \mu I] = \det \begin{bmatrix} -\mu & 1 \\ -1 & \frac{2-(1-2\alpha)\cdot\Lambda}{1+\alpha\cdot\Lambda} - \mu \end{bmatrix} = 0, \quad (2.29)$$

con

$$\Lambda = 4 \cdot \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k_x \cdot \Delta x}{2} \right).$$

In questo modo l'equazione caratteristica sarà del tipo:

$$f(\mu) = \mu^2 - \left[\frac{2 - (1 - 2\alpha)\Lambda}{1 + \alpha \cdot \Lambda} \right] \cdot \mu + 1 = 0. \quad (2.30)$$

a partire dalla quale possono essere individuate le due radici:

$$\mu_{1,2} = \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} - 1} \quad (2.31)$$

con

$$\Omega = \frac{2 - (1 - 2\alpha)\Lambda}{1 + \alpha \cdot \Lambda} \quad (2.32)$$

Il modulo degli autovalori è $|\mu| \leq 1$ (incondizionata stabilità) se:

$$\Delta = \Omega^2 - 4 \leq 0, \quad (2.33)$$

e le radici sono complesse coniugate per $\Delta = \Omega^2 - 4 < 0$, reali e coincidenti per $\Delta = 0$. Svolgendo i conti si ottiene:

$$\Lambda \leq \frac{4}{1 - 4\alpha} \quad (2.34)$$

che porta all'espressione

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \cdot (1 - 4\alpha) \leq 1, \quad (2.35)$$

ed in definitiva alla condizione:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \sqrt{\frac{1}{1-4\alpha}}, \quad (2.36)$$

con autovalori di modulo minore uguale all'unità per valori di $\alpha \in [1/4, 1/2]$. Diremo che lo schema (2.20) è *incondizionatamente stabile* per $\alpha \in [1/4, 1/2]$; se invece $\alpha \in [0, 1/4)$ diremo che lo schema (2.20) è stabile se (2.36) è soddisfatta.

2.3 Confronto tra i metodi esplicito ed implicito

In generale i metodi espliciti hanno bisogno di una granularità di griglia abbastanza fine, in modo da potersi adattare alle variazioni rapide della soluzione; per contro, i metodi impliciti richiedono griglie meno fini, ma in generale hanno bisogno di invertire una matrice a bande. Nel caso che stiamo esaminando, basato sul metodo di *Crank-Nicholson*, si deve risolvere un sistema che fa capo ad una matrice tridiagonale.

Il giusto compromesso nella scelta dei due metodi si basa sulla quantificazione del costo computazionale attraverso la valutazione del numero di operazioni in virgola mobile (*flop*) che deve essere effettuato nei due casi. Per un metodo esplicito del tipo indicato in precedenza sono necessarie $7N$ *flop* per passo temporale ⁸, dove N rappresenta il numero di punti nella griglia orizzontale x . I valori di N e di Δx possono essere fissati in modo tale da assumere gli stessi valori per i due schemi; la differenza tra i due schemi sarà soltanto nel passo temporale.

Il numero di *flop* richiesti per risolvere un sistema tridiagonale mediante *decomposizione LU* sono $3(N-1) + (2N-1)F_d$ ⁹, dove F_d rappresenta il numero di *flop* per effettuare una divisione ¹⁰. In generale N sarà grande,

⁸Una moltiplicazione ed un'addizione vengono considerate equivalenti ad un *flop* ciascuna ($a \cdot x + b$) equivale a due *flop*.

⁹Dove $3(N-1)$ rappresenta il numero complessivo di addizioni e moltiplicazioni, mentre $(2N-1)$ è il numero di divisioni.

¹⁰Tale valore varia da macchina a macchina ($10 \leq F_d \leq 20$).

crescente al decrescere di r_{CFL} ; assumiamo $q = \frac{r_{esp}}{r_{imp}}$ che, secondo le ipotesi fatte su N e Δx , stabilisce una relazione tra le granularità temporali nei due metodi:

$$(\Delta t)_{imp} = q \cdot (\Delta t)_{esp}.$$

Il rapporto tra il numero di operazioni in virgola mobile nei due metodi è il seguente:

$$f(N, q) = \frac{7 \cdot N \cdot q}{3(N-1) + (2N-1)F_d} \quad (2.37)$$

per N passi temporali in un algoritmo seriale.

Ponendo $q = 10$ (equivalente a considerare $r_{esp} = 0.1$ e $r_{imp} = 1.0$) ed $F_d = 15$ (valore tipico), avremo:

$$\frac{70 \cdot N}{33N - 18} > 1, \quad \forall N. \quad (2.38)$$

Si può notare come il tempo di calcolo richiesto dai due metodi sia confrontabile, tenendo conto del fatto che i metodi espliciti necessitano di una griglia più fine. Nel caso in esame, al tendere di $N \rightarrow \infty$ il rapporto si stabilizza su un valore poco più elevato di 2 ($f(\infty) = 70/33 \simeq 2.12$). Nei casi pratici le differenze tra i coefficienti di stabilità non sono mai così grandi (generalmente $q < 10$), ciò rafforza l'affermazione di equivalenza tra i due metodi in termini di tempi di calcolo.

Capitolo 3

Esempi di simulazione della propagazione

In questo paragrafo verranno illustrati degli esempi di propagazione tridimensionale derivati dal modello illustrato nelle pagine precedenti, attraverso la simulazione numerica dell'evoluzione delle onde acustiche.

In ingresso avremo il campo di velocità definito su un dominio tridimensionale ed il modello di sorgente (in generale una distribuzione di onde di *Ricker*). I dati di uscita sono stati ottenuti dall'esecuzione del programma di simulazione scritto in HPF sulla piattaforma parallela IBM-SP2.

3.1 Sorgente puntiforme: campo di velocità uniforme

Nel seguito considereremo un dominio tridimensionale di dimensione 128^3 ma, per comodità di rappresentazione, visualizzeremo solo sezioni bidimensionali ($y = \text{costante}$).

Il semplice esempio di propagazione che consideriamo in questo paragrafo è costituito da una sorgente d'onda posizionata nel centro del dominio, con velocità uniforme, che si propaga verso la frontiera dello stesso. Ciò che

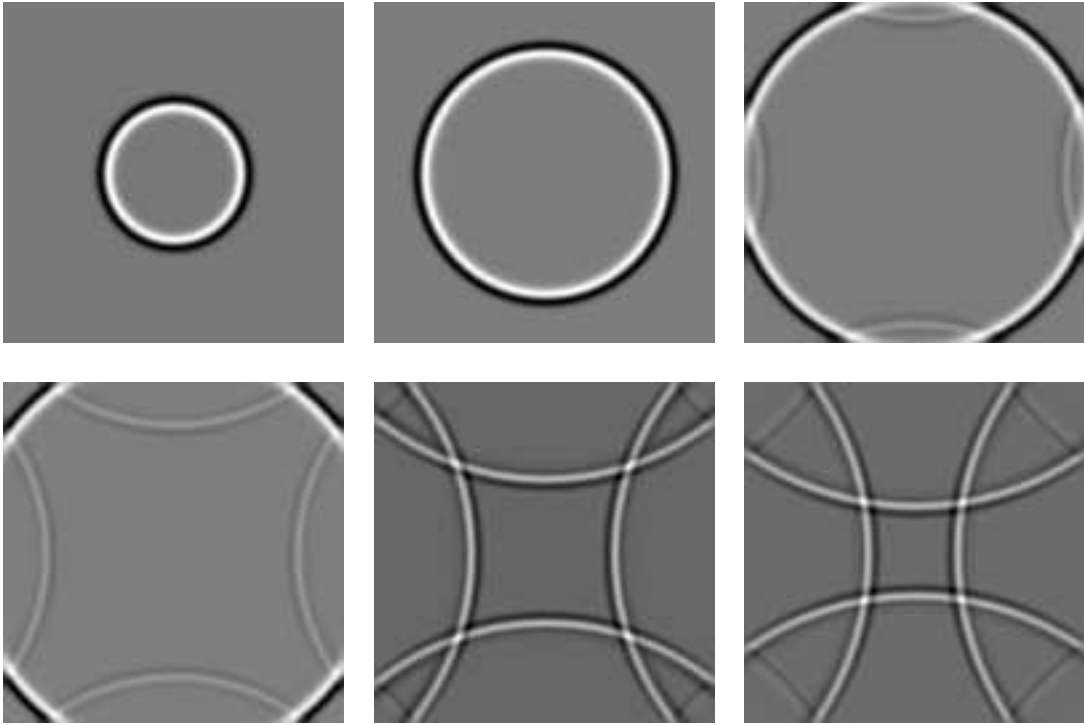


Figura 3.1: Esempio di propagazione in presenza di condizioni parassiali al contorno ma in assenza dell'inversione del segno di \dot{P} .

ci interessa osservare è proprio il comportamento dell'onda in prossimità della frontiera del dominio; in particolare è interessante evidenziare il comportamento della propagazione in assenza dell'inversione del segno di \dot{P} , come mostrato nella figura (3.1). In essa può notarsi la presenza di un'onda riflessa sulle pareti che delimitano il dominio (*frontiera*) di calcolo, tale onda riprende a propagarsi verso l'interno del dominio sovrapponendosi al segnale della propagazione preesistente.

La presenza della sola inversione del segno viene mostrata nella figura (3.2) dalla quale si evidenzia l'effetto desiderato di assenza di onda riflessa verso l'interno del dominio e quindi di *assorbimento* dell'onda da parte della frontiera. Un tale comportamento conferisce all'evoluzione dell'onda un comportamento *simile* alla propagazione in un dominio illimitato. Si noti una leggera degradazione del segnale in un intorno stretto della frontiera, dovuto al calcolo dell'inversione che viene effettuato in tali punti con le

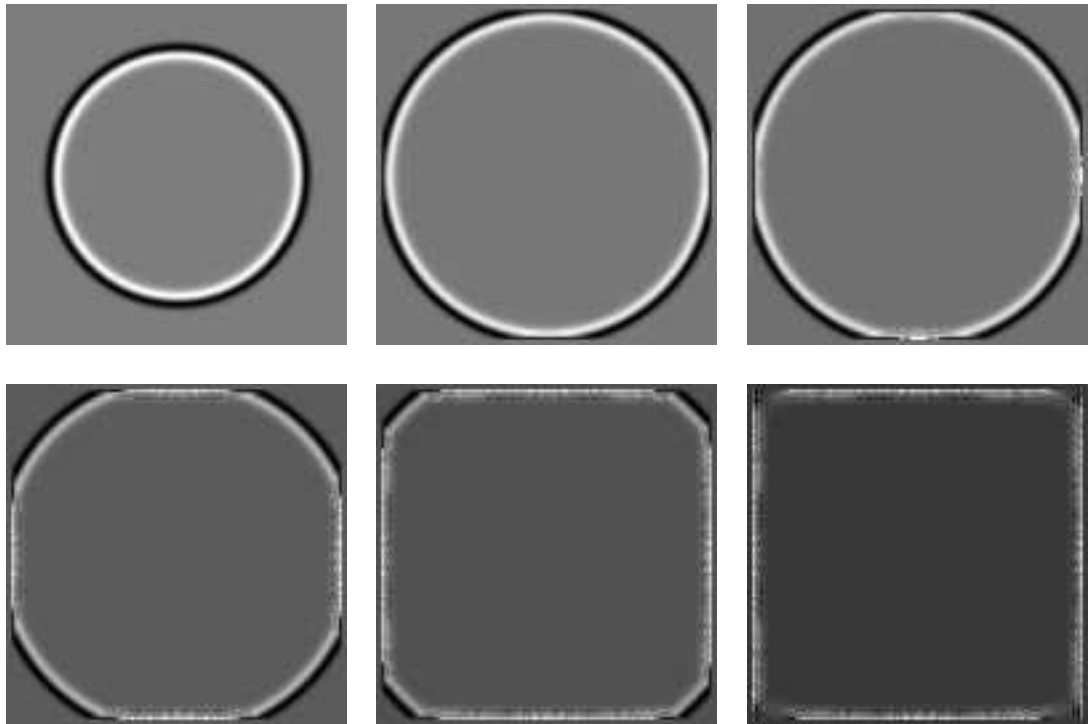


Figura 3.2: Esempio di propagazione in assenza delle condizioni parassiali al contorno ma in presenza della sola inversione del segno di \dot{P} .

modalità descritte in precedenza. Applicando sia l'inversione del segno che le condizioni parassiali si riduce l'effetto di degradazione presente nella zona di frontiera del dominio di calcolo come mostrato in figura (3.3).

3.2 Sorgente puntiforme: discontinuità del campo di velocità

In questo secondo esempi (figura (3.4)) viene mostrata la propagazione in presenza di una brusca discontinuità del campo di velocità, a partire da una sorgente puntiforme posizionata a centro di un volume cubico (256^3). All'attraversamento della discontinuità vengono prodotte due componenti d'onda: la componente trasmessa viene assorbita alla frontiera mentre

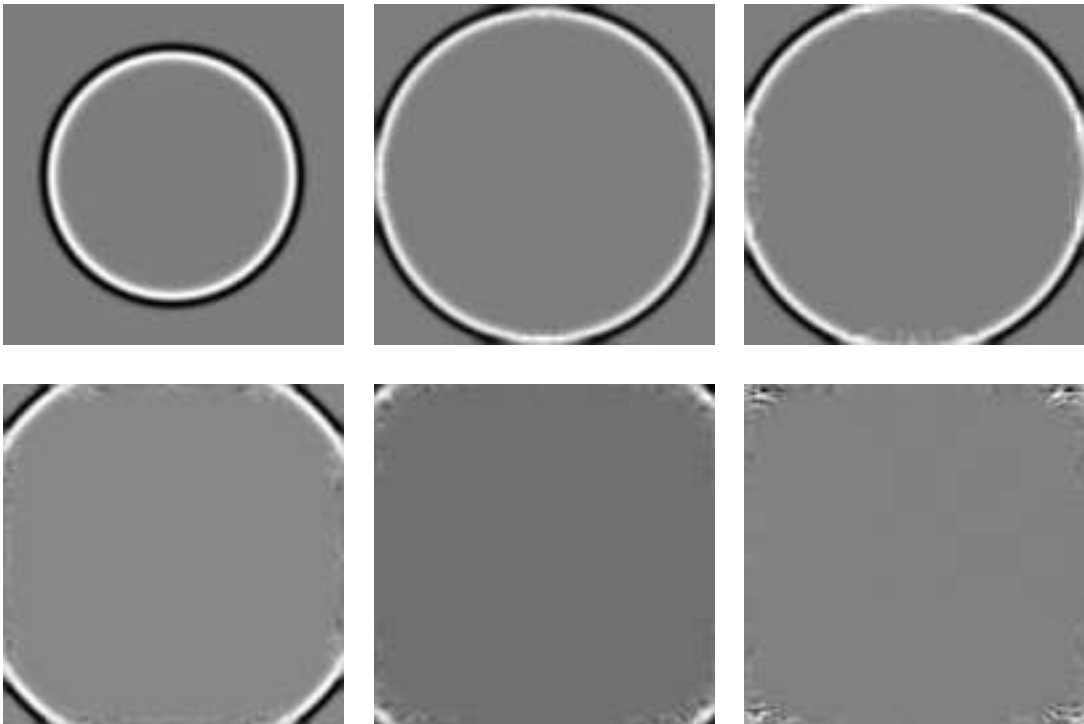


Figura 3.3: Esempio di propagazione in presenza delle condizioni assorbenti sul dominio di calcolo (128^3).

quella riflessa continua a vagare all'interno del dominio.

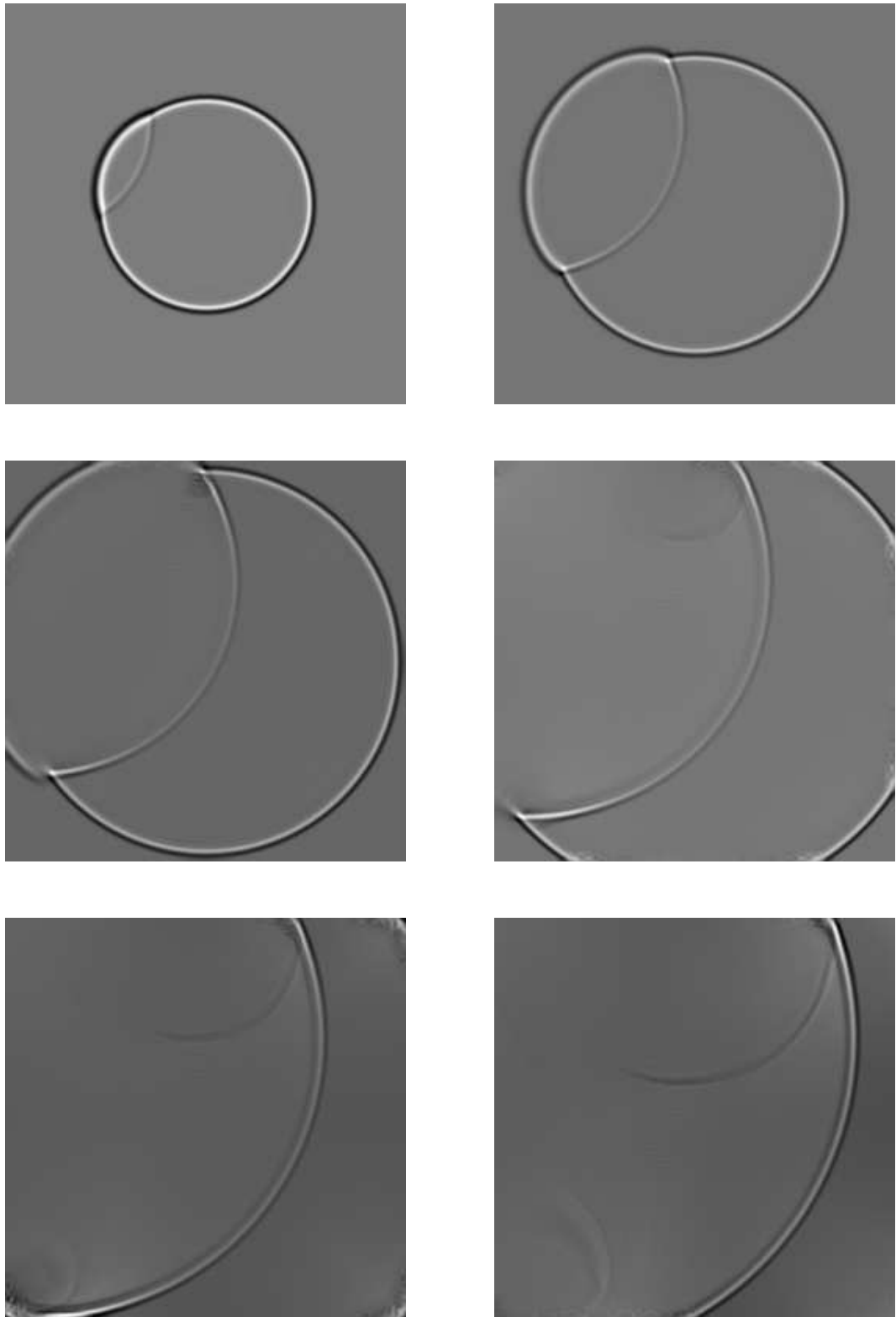


Figura 3.4: *Propagazione in presenza di una discontinuità del campo di velocità.*

Bibliografia

- [1] Scales J. A. *Note for an introductory course of Seismic Migration*. Center of Wave Phenomena - Colorado School of Mines, Samizdat Press, 1993.
- [2] Kelly K.R. Alford R.M. and Boore D.M. *Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation*. *Geophysics*, v. 39, p. 834-842, 1974.
- [3] Reynolds A. C. *Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems*. *Geophysics*, 43, 1099-1110, 1978.
- [4] Collino F. *High Order Absorbing Boundary Conditions for Wave Propagation Models: Straight Line Boundary and Corner cases*. INRIA, Rocquencourt, France, 1995.
- [5] Clayton R. and Engquist B. *Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Equations*. *Bulletin of Seismological Society of America*, 67:6, 1529-1540.