

Introduzione all'equazione scalare delle onde

Mauro Ennas

Free Report
Creative Commons 2013

Creative Commons 2013
Estratto dalla tesi di laurea 1998

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | L'equazione scalare delle onde acustiche | 1 |
| 1.1 | Teoria dell'elasticità | 3 |
| 1.1.1 | Tensori di sforzo e di rotazione | 4 |
| 1.2 | Propagazione delle deformazioni | 14 |
| 1.2.1 | Mezzo elastico, omogeneo ed isotropo | 14 |
| 1.2.2 | Propagazione delle onde longitudinali piane | 16 |
| 1.2.3 | Propagazione delle onde longitudinali sferiche | 21 |
| 2 | Cenni sulla teoria hamiltoniana | 27 |
| 2.1 | L'equazione delle corde vibranti | 29 |
| 2.2 | Energia | 30 |
| 2.2.1 | Velocità di gruppo e dispersione | 31 |
| 3 | Equazione d'onda nel dominio di Fourier | 35 |
| 3.1 | Approssimazione parassiale dell'equazione d'onda | 38 |
| | Bibliografia | |

Capitolo 1

L'equazione scalare delle onde acustiche

I metodi utilizzati in sismica sono i più diretti e precisi tra quelli espressi in ambito geofisico. Quando, a causa di un esplosione, viene liberata dell'energia in prossimità della crosta terrestre, parte di essa viene convertita in onde elastiche che si diffondono, a partire dalla sorgente, con una velocità di propagazione dipendente dalle caratteristiche delle rocce. Nel percorso attraverso la crosta terrestre, quando l'onda incontra brusche variazioni delle proprietà elastiche della roccia (all'interfaccia tra strati di roccia diversi) parte dell'onda viene riflessa e parte trasmessa o assorbita.

Le tecniche e i metodi sismici consistono nella misura dei tempi di transito a partire dal punto sorgente dell'onda sino ai vari ricevitori opportunamente disposti. Le variazioni dei tempi di transito corrispondono alle diverse caratteristiche strutturali della roccia.

Possiamo vedere l'onda come una perturbazione che si sposta attraverso il mezzo. Se consideriamo una perturbazione che si diffonde a partire da una sorgente, il fronte d'onda all'istante t_0 può essere visualizzato come la frontiera spaziale corrispondente al moto dell'onda in quell'istante.

Ciò indica quanto spazio è stato percorso dall'onda di perturbazione nel suo moto attraverso il mezzo. Possiamo definire il fronte d'onda come una superficie i cui punti sono rappresentativi dei tempi di propagazione della

perturbazione, a partire da un'istante iniziale; i cammini sono completamente definiti, nelle tre coordinate spaziali, attraverso la conoscenza della velocità di propagazione.

Applicando la teoria dei raggi non si fa altro che utilizzare i principi dell'ottica geometrica. Non è sempre possibile spiegare l'andamento del fronte d'onda in termini di teoria dei raggi ed è quindi indispensabile conoscere la più complicata teoria dell'elasticità per riuscire a studiare quantitativamente fenomeni quali la riflessione e la rifrazione [3] [7].

Se in un *mezzo elastico monodimensionale* una perturbazione può rappresentarsi come una funzione $f(x)$ che per ogni valore di x fornisce l'ampiezza del disturbo rispetto all'istante iniziale, $f(x - Vt)$ rappresenterà la propagazione della perturbazione (senza mutare la sua forma) con velocità V nel verso delle x crescenti. L'argomento $(x - V \cdot t)$ è la *fase* della funzione d'onda.

In questo modo possiamo definire il *fronte d'onda* come una superficie i cui punti si muovono in modo tale che la fase della perturbazione conserva su di essa un valore costante. Esprimendo il fronte d'onda in propagazione in termini di teoria dei raggi si comprende meglio come il percorso del raggio non sia altro che il cammino che dal punto sorgente porta al punto di propagazione più esterno.

In un mezzo isotropo i raggi sono normali al fronte d'onda; generalmente in un mezzo anisotropo i raggi intersecano il fronte d'onda con un angolo obliquo. Avendo definito l'onda come un disturbo che si propaga attraverso un mezzo, consideriamo tale perturbazione come una semplice funzione $f(x)$ periodica o aperiodica. Un tipo semplice di funzione periodica è chiaramente, una funzione armonica, cioè un'onda tramite la quale la perturbazione si propaga nei punti dello spazio con variazioni sinusoidali; utilizzando il teorema di *Fourier* possiamo analizzare qualunque funzione periodica in termini delle sue armoniche (§(3)).

1.1 Teoria dell'elasticità

Consideriamo un mezzo elastico illimitato nella situazione di equilibrio. Definiamo il *mezzo* come uno spazio pieno di materia nel quale possono osservarsi fenomeni fisici di qualche tipo. La presenza di materia viene caratterizzata attraverso una funzione della posizione che chiamiamo *densità*, che misura la massa per unità di volume.

Un mezzo deformabile è quello nel quale è possibile separare due punti ad esso appartenenti mediante l'applicazione di appropriate *forze*; se il mezzo restaura la condizione di partenza una volta rimosse le forze di deformazione, diremo che il mezzo è un mezzo elastico.

Nella teoria dell'elasticità si considerano mezzi continui nei quali la densità $\rho(\mathbf{r})$ è una funzione continua della posizione. Nonostante ciò è possibile, senza contraddizione in termini, considerare il mezzo come costituito dalla somma di porzioni più piccole, evidenziando i fenomeni elastici dalla loro relazione di dipendenza all'interno del mezzo stesso.

Su una piccola porzione di materiale agiscono forze *interne* ed *esterne*. Le prime sono dovute alle azioni reciproche di contatto tra particelle materiali appartenenti al mezzo, le seconde a cause esterne al mezzo come ad esempio, la forza di gravità. La risultante delle forze interne agenti su una particella puntiforme A di materiale appartenente al mezzo viene chiamata *tensione* (interna) in A.

Considerando una superficie infinitesima, contenente il punto A di separazione tra due porzioni del mezzo, diremo che ognuna delle due porzioni, così individuate, esercita sull'altra, lungo tutta la superficie di separazione (superficie di contatto tra le due porzioni), un'azione proporzionale alla superficie di separazione stessa (ipotesi di linearità tra causa ed effetto). In generale il vettore *tensione* risultante non è perpendicolare alla superficie di contatto; la tensione su unità di superficie rappresenta la *pressione* esercitata su tale superficie.

La teoria dell'elasticità considera la deformazione di un corpo come la risultante di due tipi differenti di effetti che agiscono modificando il volume attraverso *tensioni normali* (o pressioni), oppure modificando la forma attraverso *sforzi di taglio* ossia *forze tangenziali*. Le forze aventi orientamento

qualunque si possono scomporre in componenti normali e tangenziali.

La configurazione di equilibrio del mezzo, cioè la condizione assunta dal mezzo in assenza di forze esterne agenti su di esso, verrà assunta come configurazione di riferimento.

Diremo che un elemento di volume del mezzo è in *equilibrio statico* se la risultante delle tensioni è nulla, ossia se le tre componenti agenti su una faccia del volume sono uguali e di verso opposto a quelle agenti sulla faccia opposta dell'elemento stesso. Inoltre, per realizzare l'equilibrio, occorre ancora che il momento totale delle forze rispetto ad un riferimento sia nullo, ossia che il volume non subisca rotazioni.

1.1.1 Tensori di sforzo e di rotazione

Nella trattazione seguente [8] utilizzeremo una notazione tensoriale cartesiana per trattare le deformazioni elastiche, con la convenzione che quando si presentano delle espressioni nelle quali un certo indice viene ripetuto in un termine, questo termine deve essere sommato su tutti i valori dell'indice in questione (*convenzione di somma*).

Se una particella viene spostata dalla posizione x_i ($i = 1, 2, 3$) al punto $x_i - u_i$, chiameremo u_i spostamento da x_i , dove u_i è una componente del vettore spostamento.

In generale lo spostamento è differente per differenti punti in un mezzo, ciò significa che può essere rappresentato come un vettore dipendente dalla posizione $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$. Possiamo scrivere una funzione del tipo $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r})$ nella quale \mathbf{r} è il vettore posizione. In un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale (figura (1.1)) avremo che

$$\mathbf{r} = x_1 \cdot \mathbf{i}_1 + x_2 \cdot \mathbf{i}_2 + x_3 \cdot \mathbf{i}_3.$$

Consideriamo un elemento di volume V . Se chiamiamo spostamento da un punto $\mathbf{r} \in V$ la funzione $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ allora $\mathbf{U}(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$ rappresenta lo spostamento di un punto vicino. Supponendo che $\mathbf{r} + d\mathbf{r} \in V$, sviluppando in serie di *Taylor* arrestato al prim'ordine, avremo:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{r}) + d\mathbf{r} \cdot \text{grad}(\mathbf{U})(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

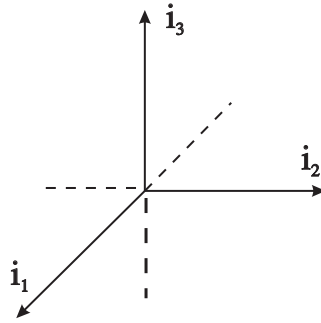


Figura 1.1: Versori di riferimento.

nella quale il gradiente ¹ viene calcolato nel punto $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Si può notare che lo spostamento in questo modo risulta scomposto in due termini, una parte $U(\mathbf{r})$ che è la stessa per tutti i punti dell'elemento di volume ed un termine di spostamento $d\mathbf{r} \cdot \text{grad}(\mathbf{U})$ di ogni punto da ciascuno degli altri. Il termine $U(\mathbf{r})$ rappresenta il termine *traslazionale* dello spostamento. Per esprimere quanto detto in termini tensoriali, scriviamo i vettori \mathbf{r} , $d\mathbf{r}$ e \mathbf{U} in termini delle loro componenti x_i , dr_i e u_i e determiniamo la j -ma componente del termine $d\mathbf{r} \cdot \text{grad}(\mathbf{U})$:

$$[U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r})]_j = [d\mathbf{r} \cdot \text{grad}(\mathbf{U})]_j = \sum_i dx_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

ovvero utilizzando la convenzione di somma, semplicemente

$$dx_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

nella quale il termine $\partial u_j / \partial x_i$ è un tensore di second'ordine del gradiente di $U(\mathbf{r})$ che può essere scritto come:

$$dx_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = dx_i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right] = (e_{ij} + \omega_{ij}) dx_i, \quad (1.2)$$

dove

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = e_{ji} \quad (1.3)$$

è un tensore simmetrico, mentre

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\omega_{ji} \quad (1.4)$$

¹Intendendo per $\text{grad}(\mathbf{U})$ il gradiente di U componente per componente.

è un tensore antisimmetrico.

Il tensore e_{ij} esprime i cambiamenti in dimensione e forma dell'elemento di volume ed è detto *tensore di sforzo* o componente traslazionale; il tensore ω_{ij} rappresenta la rotazione rigida dell'elemento di volume e viene detto *tensore di rotazione*.

Per provare queste affermazioni consideriamo il tensore di rotazione ω_{ij} . Essendo $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, tutte le componenti aventi $i = j$ (sulla diagonale del tensore) sono nulle:

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

e quindi il tensore ω_{ij} ha tre sole componenti indipendenti, dunque possiamo associare ω_{ij} ad un vettore, diciamo Ω_k . Per mostrare la relazione esistente tra le componenti ω_{ij} e le componenti Ω_k dobbiamo introdurre il tensore di terz'ordine ϵ_{mpk} ² definito in modo tale che:

$$\epsilon_{mpk} = \begin{cases} 0 & \text{se almeno due indici sono uguali tra loro;} \\ +1 & \text{se } m, p, k \text{ tutti diversi e ordinati ciclicamente;} \\ -1 & \text{se } m, p, k \text{ tutti diversi e non ordinati ciclicamente.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Moltiplicando $\omega_{i,j}$ per ϵ_{mpk} , otteniamo un tensore di quint'ordine. Contraendo questo tensore, ponendo rispettivamente $m = i$ e $p = j$, il suo rango viene ridotto di quattro, ovvero otteniamo un tensore di prim'ordine, cioè un vettore:

$$b_k = \epsilon_{ijk}\omega_{ij}, \quad (1.7)$$

con componenti:

$$\begin{cases} b_1 = \epsilon_{ij1}\omega_{ij} = \epsilon_{231}\omega_{23} + \epsilon_{321}\omega_{32} = \omega_{23} - \omega_{32} = 2\omega_{23} \\ b_2 = \epsilon_{ij2}\omega_{ij} = \epsilon_{312}\omega_{31} + \epsilon_{132}\omega_{13} = 2\omega_{31} = -2\omega_{13} \\ b_3 = \epsilon_{ij3}\omega_{ij} = \epsilon_{123}\omega_{12} + \epsilon_{213}\omega_{21} = -2\omega_{21} = 2\omega_{12} \end{cases} \quad (1.8)$$

perchè:

$$\epsilon_{ijk}\omega_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\epsilon_{jik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (1.9)$$

²Il tensore di *Levi-Civita*.

Confrontando il tensore di rotazione espresso in (1.5) tramite l'equazione (1.7) avremo:

$$\Omega_k = \frac{1}{2}b_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{ij}. \quad (1.10)$$

Ciò porta l'equazione (1.10) nella forma

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (1.11)$$

ovvero alla forma completa:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{231} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \epsilon_{321} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \Omega_2 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{312} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \epsilon_{132} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \Omega_3 &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_{123} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \epsilon_{213} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

nella quale Ω è il vettore di rotazione, pari ad 1/2 della *torsione* del vettore spostamento \mathbf{U} , ovvero pari al *rotore*:

$$\Omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{U}. \quad (1.13)$$

Invece di associare ω_{ij} al vettore Ω_k , possiamo associare Ω_k al tensore di rotazione ω_{ij} , invertendo l'equazione (1.10). Moltiplicando Ω_k per il tensore ϵ_{ijp} e contraendo il risultante tensore di quart'ordine, ponendo $p = k$, otteniamo un tensore di second'ordine:

$$\omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \Omega_k \quad (1.14)$$

e quindi il secondo termine dell'equazione (1.2) può scriversi come:

$$\omega_{ij} dx_i = \epsilon_{ijk} \Omega_k dx_i = (\Omega \times dr)_j; \quad (1.15)$$

si noti che il termine al secondo membro dell'equazione (1.15) è la j -ma componente del prodotto vettoriale $\Omega \times dr$ che rappresenta lo spostamento dovuto ad una rotazione infinitesimale Ω .

Per una pura rotazione della stessa entità ovunque, la condizione necessaria e sufficiente è che e_{ij} sia nullo ovunque, cioè $\partial \omega_{ij} / \partial x_m$ deve essere nullo per $e_{ij} = 0$. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_m} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial e_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial e_{im}}{\partial x_j} = 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

mostra che gli ω_{ij} sono costanti.

Consideriamo adesso il termine $e_{ij}dx_i$ dello spostamento relativo espresso attraverso l'espressione (1.2). Combinando i valori $i = 1, 2, 3$ con i valori $j = 1, 2, 3$ si ottiene:

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = e_{21} \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) = e_{32} \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = e_{13}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Nell'equazione (1.1) abbiamo considerato dr sufficientemente piccolo, per poter trascurare i termini di ordine superiore dello spostamento spaziale \mathbf{U} . In questo modo, in un'intorno sufficientemente piccolo di ciascun punto, lo spostamento è una funzione lineare delle coordinate relative dr ovvero di dx_i in notazione tensoriale.

Consideriamo l'interno di un materiale (solido, omogeneo ed isotropo) come costituito da porzioni elementari adiacenti. Fissiamo l'attenzione su uno di questi elementi, diciamo di coordinate (x_1, x_2, x_3) ; per effetto di forze esterne essa subisce uno spostamento del tipo $(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$, allo stesso modo gli elementi ad esso adiacenti. Diremo che le componenti e_{11} , e_{22} ed e_{33} dello sforzo determinano l'elongazione degli elementi materiali di δx_1 , δx_2 e δx_3 rispettivamente, cioè lo spostamento di una linea di elementi per unità di lunghezza. ciò viene indicato come *sforzo normale* (figura (1.2)), rispettivamente nelle direzioni x_1 , x_2 ed x_3 . Consideriamo la componente e_{12} . L'espressione $\partial u_2 / \partial x_1$ rappresenta la variazione di u_2 nella direzione x_1 ; allo stesso modo per quanto riguarda e_{21} . Lo *sforzo* e_{12} viene detto di *taglio* o *sforzo trasverso*. Allo stesso modo, gli sforzi e_{23} e e_{31} rappresentano gli sforzi di taglio nelle altre direzioni trasverse.

Le componenti $e_{ij}dx_i$ dello spostamento espresso nell'equazione (1.2) rappresentano sforzi normali e di taglio che producono cambiamenti di forma (deformazioni) negli elementi di volume.

Poichè il tensore e_{ij} è simmetrico, possiede solo 6 componenti indipendenti, date in termini delle derivate delle 3 componenti di spostamento. Definiamo *traccia* del tensore di sforzo e la indichiamo con θ la somma delle componenti sulla diagonale:

$$\theta = Tr(e_{ij}) = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (1.18)$$

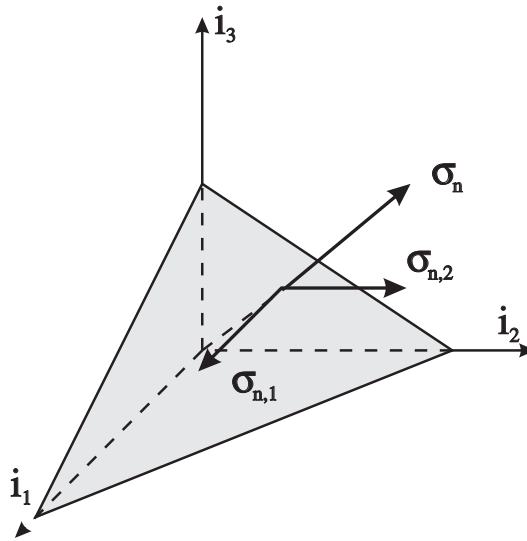


Figura 1.2: Componenti delle forze normali σ_n .

che rappresenta la variazione in volume per unità di volume dell'elemento. Si indica θ anche col termine di *dilatazione*.

Riepilogando, abbiamo visto che lo spostamento di un elemento appartenente ad un corpo elastico può essere rappresentato come la combinazione di una rotazione (espressa tramite ω_{ij}) ed una deformazione traslazionale (espressa da e_{ij}).

Lo sforzo in un corpo elastico è accompagnato da una tensione σ (*stress*). Si è osservato sperimentalmente che in molti corpi solidi la tensione, misurata come la forza sull'unità di area necessaria per produrre lo sforzo è proporzionale alle forze che si oppongono al superamento del *limite elastico*. Ciò è noto sotto il nome di legge di Hooke.

La legge di Hooke

Le forze interne che si oppongono alla deformazione di un corpo elastico si chiamano *reazioni elastiche*. Diremo che un corpo è *plastico* se la deformazione indotta su di esso è permanente. Esistono corpi che si comportano come elastici o come plastici a seconda della durata dell'applicazione delle forze: sotto l'azione di forze rapidamente variabili si comportano come mez-

zi perfettamente elastici, mentre sotto l'azione di forze applicate per lungo tempo si comportano come mezzi perfettamente plastici. Questi corpi vengono chiamati *viscoelastici* e le formazioni rocciose sono di questo tipo.

Nel caso di corpi perfettamente elastici, possiamo considerare delle forze agenti estremamente piccole, in modo tale che sia lecito considerare le relazioni che le legano alle deformazioni delle relazioni lineari.

In generale, le forze che agiscono su un elemento di superficie dS di un mezzo sono inclinate rispetto alla normale alla superficie; devono perciò specificarsi le tre componenti rispetto agli assi x_i , cioè tramite espressioni del tipo $\sigma_{ni}dS$ ³ (trascuriamo le forze d'inerzia e le forze interne di coesione). Se consideriamo un elemento di volume con spigoli dx_1 , dx_2 e dx_3 centrato

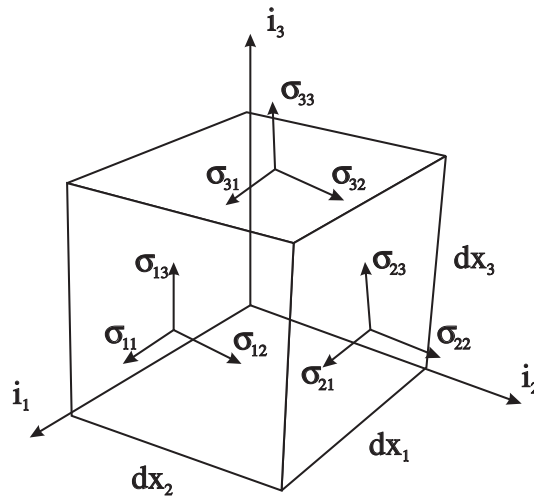


Figura 1.3: Forze agenti sulle facce di un cubo elementare; non sono state riportate le componenti agenti sulle facce nascoste, pur essendo presenti.

nel punto x_1 , x_2 ed x_3 (figura (1.6)), con facce ortogonali agli assi coordinati (come in figura (1.6)). La forza agente sulla faccia dx_2dx_3 centrata in $x_1 + \frac{1}{2}dx_1$ può essere espressa nel modo seguente;

$$(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})dx_2dx_3,$$

³Indicando col primo pedice la direzione della normale alla superficie sulla quale deve agire la forza e col secondo pedice la direzione della forza. Le $\sigma_{ni}dS$ è una forza esercitata per unità di superficie.

nella quale le tensioni σ_{1j} sono valutate in $x_1 + \frac{1}{2}dx_1$. All'equilibrio le tensioni sulla faccia opposta saranno:

$$-(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})dx_2dx_3,$$

valutate in $x_1 - \frac{1}{2}dx_1$.

La forza totale agente sulle due facce opposte del cubo sarà :

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} dV, \quad (1.19)$$

nella quale dV è il volume del cubo. Utilizzando la convenzione di somma potremo indicare

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow \sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3,$$

per tutte le facce a x_i costante. In quest'ultima espressione σ_{ij} è un tensore simmetrico di second'ordine, noto come *tensore di stress*.

Per mostrare la simmetria del tensore di *stress* consideriamo il momento delle forze lungo un asse passante per il centro del cubo. Se G_i rappresenta la componenti della forza di gravità, per unità di massa, e a_i le componenti dell'accelerazione impressa al cubo, l'equazione del moto diviene:

$$\rho \cdot a_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho \cdot G_i, \quad (1.20)$$

con ρ indichiamo la densità; ρa_i e ρG_i sono dell'ordine del volume l^3 , essendo l lo spigolo del cubo, mentre il momento rispetto al centro del cubo è dell'ordine di l^4 . Il momento risultante delle forze di superficie lungo l'asse parallelo a x_3 è

$$\sigma_{12} dx_2 dx_3 \cdot \frac{1}{2} dx_1 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 \cdot \frac{1}{2} dx_2,$$

ed è dell'ordine di l^3 .

Per avere equilibrio dobbiamo avere $(\sigma_{21} - \sigma_{12}) \cdot O(l^3) = O(l^4)$, e per $l \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21},$$

Allo stesso modo possono ottenersi $\sigma_{32} = \sigma_{23}$ e $\sigma_{13} = \sigma_{31}$. Ciò evidenzia la simmetria del tensore di *stress*.

La legge di *Hooke* afferma che ciascuno dei componenti dello *stress* σ_{ij} è

legato linearmente a ciascuno dei componenti dello sforzo in modo da non superare il limite elastico. Poichè σ_{ij} e e_{ij} hanno 9 componenti ciascuno, vi sono ben 81 possibili coefficienti in grado di descrivere le proprietà elastiche dei materiali.

Se il materiale è omogeneo, questi coefficienti sono costanti. Possiamo scriverli nella forma C_{ijkl} e definirli tramite l'espressione:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}, \quad (1.21)$$

dove i, j, k, l prendono i valori 1, 2 o 3. C_{ijkl} lega tra loro due tensori di second'ordine e quindi risulta essere anch'esso un tensore, di quart'ordine, detto *tensore di elasticità* (simmetrico).

Poichè σ_{ij} e e_{ij} sono entrambi tensori simmetrici, ciascuno ha sole 6 componenti indipendenti per cui i coefficienti si riducono a 36.

Se il materiale è isotropo, cioè se ha le stesse proprietà in tutte le direzioni, allora il tensore di elasticità è un tensore isotropo, ossia le sue componenti sono invarianti per rotazione degli assi, cioè:

$$C'_{mnpq} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\alpha_{lq}C_{ijkl} = C_{mnpq}, \quad (1.22)$$

per tutte le rotazioni; con α abbiamo indicato i coseni direttori degli angoli tra gli assi nella posizione iniziale e ruotata (matrice di rotazione). Operando uno scambio ciclico degli indici, ovvero sfruttando l'invarianza per rotazione e la simmetria degli indici, riduciamo il numero di componenti a quattro:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{3333} = \kappa \\ C_{1122} &= C_{2211} = C_{2233} = C_{3322} = C_{3311} = C_{1133} = \lambda \\ C_{2323} &= C_{1313} = C_{3131} = C_{2121} = C_{1212} = C_{3232} = \mu \\ C_{1221} &= C_{2112} = C_{2332} = C_{3223} = C_{3113} = C_{1331} = \nu, \end{aligned} \quad (1.23)$$

nella quale κ , λ , μ e ν sono scalari.

Per combinare queste componenti di C_{ijkl} in una equazione introduciamo un tensore δ_{ij} (*delta di Kronecker*), l'unico tensore simmetrico ed isotropo di second'ordine, che vale 1 per $i = j$ e zero per $i \neq j$.

A partire dalla *delta di Kronecker* possiamo costruire gli unici tensori isotropi di quart'ordine indipendenti, della forma:

$$\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}, \quad \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk},$$

in definitiva, possiamo rappresentare il tensore isotropo di elasticità come la combinazione lineare seguente:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \nu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.24)$$

Possiamo sostituire l'espressione (1.24) nella (1.21), ottenendo:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + \mu (e_{ij} + e_{ji}) + \nu (e_{ij} - e_{ji}), \quad (1.25)$$

tenendo conto del fatto che $e_{kl} \delta_{kl} = e_{kk} = Tr(e_{ij})$ in quanto δ_{kl} vale 1 per $l = k$ e 0 altrove; inoltre essendo $e_{ij} = e_{ji}$ l'equazione (1.25) diviene:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (1.26)$$

che rappresenta la legge di *Hooke* per i mezzi solidi isotropi e le costanti λ e μ sono le costanti elastiche di *Lamè*. In un solido isotropo il tensore di *stress* e lo sforzo hanno gli stessi assi principali.

1.2 Propagazione delle deformazioni

Gli *stress* che vengono indotti nella Terra, per gli studi di sismica, sono sconosciuti o difficili da determinare, per questo motivo vengono definiti in termini delle loro variazioni temporali che possono essere osservate direttamente o indirettamente dalle misure del campo di pressione.

Sino ad ora abbiamo considerato deformazioni elastiche sotto il profilo statico. Nel seguito si prendono in esame le dipendenze temporali delle deformazioni ovvero la propagazione delle onde di deformazione del mezzo.

1.2.1 Mezzo elastico, omogeneo ed isotropo

Vediamo di estendere quanto appena espresso, in una forma coerente con la notazione tensoriale, per ricavare una forma generale dell'equazione che governa la propagazione di una perturbazione che ha origine in un punto appartenente ad un mezzo illimitato, perfettamente elastico, isotropo ed omogeneo.

Le forze gravitazionali ed in particolare gli effetti di inomogeneità siano trascurabili. L'equazione del moto può essere espressa come segue:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1.27)$$

con ρ densità del mezzo.

Sostituiamo σ_{ij} dell'espressione (1.26) nell'equazione (1.27):

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \delta_{ij} \theta + 2\mu e_{ij}), \quad (1.28)$$

con $\theta = \nabla \cdot \mathbf{U} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ e $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j)$, quindi:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (1.29)$$

ovvero

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i. \quad (1.30)$$

Se il sistema di coordinate è cartesiano ortogonale, possiamo utilizzare la notazione vettoriale:

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (1.31)$$

Utilizzando l'identità

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}),$$

otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}), \quad (1.32)$$

che rappresenta l'equazione generale di propagazione delle onde elastiche. Se supponiamo la funzione di spostamento \mathbf{U} sia periodica di frequenza $\omega/2\pi$ (monocromatica)

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R} \left(e^{j\omega t} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \right),$$

avremo un'equazione del tipo:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{k^2} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{h^2} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (1.33)$$

con:

$$\begin{cases} k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} \\ h^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu} \end{cases} \quad (1.34)$$

Per semplificare l'equazione introduciamo il potenziale scalare:

$$\Phi = \frac{1}{k^2} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.35)$$

e il potenziale vettore

$$\Psi = \frac{1}{h^2} \nabla \times \mathbf{u}. \quad (1.36)$$

Dalla conoscenza del potenziale vettore e di quello scalare è possibile ricostruire lo spostamento $\mathbf{u}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{u} = -\nabla \Phi + \nabla \times \Psi. \quad (1.37)$$

Ciò significa che possiamo scomporre quest'equazione in due equazioni differenziali distinte, una per la propagazione delle onde longitudinali (*onde P*) e l'altra per le onde trasverse (*onde S*). Nell'equazione precedente compaiono gli operatori *divergenza* e *rotore*, i quali hanno numerose utili proprietà, tra le quali le due seguenti:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (1.38)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0, \quad (1.39)$$

che possono essere utilizzate immediatamente, fornendo i seguenti risultati:

$$\nabla^2 \Phi = -k^2 \Phi; \quad (1.40)$$

$$\nabla \cdot \Psi = 0; \quad (1.41)$$

$$\nabla^2 \Psi = -h^2 \Psi. \quad (1.42)$$

Se il potenziale scalare Φ ed il potenziale vettore Ψ soddisfano le equazioni (1.35) e (1.36), allora lo spostamento \mathbf{u} dato nella forma (1.37) soddisferà dall'equazione (1.33). Per verificarlo è sufficiente applicare nuovamente gli operatori divergenza e rotore all'equazione (1.37) ed operare la sostituzione nelle equazioni (1.40), (1.41) e (1.42):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = k^2 \Phi,$$

$$\nabla \times \Psi = h^2 \Psi,$$

identiche alle (1.35) (1.36).

Con

$$\begin{cases} k = \frac{\omega}{v_p} \\ h = \frac{\omega}{v_s}, \end{cases} \quad (1.43)$$

ed inoltre $v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ e $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

1.2.2 Propagazione delle onde longitudinali piane

Prendiamo in considerazione l'equazione delle onde longitudinali (1.40). Per risolvere tale equazione [2] utilizzeremo il metodo di separazione delle variabili, ponendo:

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (1.44)$$

con $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ funzioni esplicite delle sole variabili x , y e z rispettivamente.

Utilizzando la forma (1.44) nell'equazione (1.40) e dividendo per XYZ otteniamo:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k^2. \quad (1.45)$$

La somma dei tre termini al primo membro dell'equazione (1.45) deve essere costante, la separazione delle variabili nella dipendenza spaziale permette di supporre che ciascun termine sia a sua volta costante:

$$\begin{cases} -k_x^2 = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \\ -k_y^2 = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \\ -k_z^2 = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \end{cases} \quad (1.46)$$

Ciascuna di queste equazioni ha una sola variabile indipendente per cui le derivate parziali sono ora derivate totali. In accordo con la (1.45):

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2. \quad (1.47)$$

Le soluzioni delle equazioni (1.46) sono:

$$\begin{cases} X = A_x^+ e^{jk_x x} + A_x^- e^{-jk_x x} \\ Y = A_y^+ e^{jk_y y} + A_y^- e^{-jk_y y} \\ Z = A_z^+ e^{jk_z z} + A_z^- e^{-jk_z z}. \end{cases} \quad (1.48)$$

In accordo con l'equazione (1.44), il potenziale scalare potrà esprimersi in termini di sovrapposizione lineare:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \sum_{k_z} A_{xyz} e^{j \cdot (k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (1.49)$$

le somme vengono effettuate al variare di k_x , k_y e k_z in accordo con l'equazione (1.47).

Con k abbiamo indicato il numero d'onda ovvero la frequenza spaziale definita come:

$$k = \frac{\omega}{v_P} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (1.50)$$

con ω frequenza angolare, v_P velocità longitudinale e λ lunghezza d'onda. Il numero di soluzioni (1.49) che soddisfano la condizione (1.47) è molto elevato. Un'onda armonica, piana e progressiva è una di queste soluzioni. In questo caso $A_x^- = A_y^- = A_z^- = 0$ e se il piano d'onda è parallelo all'asse y le onde P (ma anche le onde S con polarizzazione verticale: onde SV) non

dipendono da y .

Fissando $k_x^2 = \eta^2$ nella condizione (1.47) con $\eta \in \mathcal{R}$, per le onde piane troviamo

$$\Phi_0 = e^{-az+j\eta x}, \quad (1.51)$$

con $a^2 = \eta^2 - k^2$ ed ampiezza unitaria in $z = 0$; si nota come l'ampiezza si attenui esponenzialmente nella direzione delle z crescenti.

Per le onde trasverse avremo una soluzione simile:

$$|\Psi_0| = e^{-bz+j\eta x},$$

con $b^2 = \eta^2 - h^2$ e $h = \frac{\omega}{v_S}$ con numero d'onda per le onde trasverse e v_S la relativa velocità.

Modello semplificato per la propagazione longitudinale

Consideriamo un piano π in un volume omogeneo, isotropo ed illimitato, perpendicolare all'asse orizzontale x (figura (1.4)); supponiamo che tale piano si sposti per effetto di tensioni normali, di una quantità $u(x, t)$ all'istante t [1].

Anche il piano π' , parallelo a π e di ascissa $x+dx$ subirà, nello stesso istante t , uno spostamento, $u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$. Ciò significa che la lamina tra i due piani subisce una deformazione assoluta pari a $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$.

Se la tensione normale agente sul piano π è $-N$, quella agente su π' sarà:

$$N + dN = N + \frac{\partial N}{\partial x} \cdot dx.$$

In altri termini, la forza agente sulla lamina risulta pari a $\frac{\partial N}{\partial x} \cdot dx$. Facendo ricorso alla *legge di Hooke* otteniamo:

$$N = (\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx,$$

e quindi la forza che agisce sulla lamina assume la forma:

$$(\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx.$$

Indicando con ρ la densità del mezzo, la massa della porzione di piastra sulla quale agisce la forza sarà pari a $\rho \cdot dx$, ed essendo u lo spostamento,

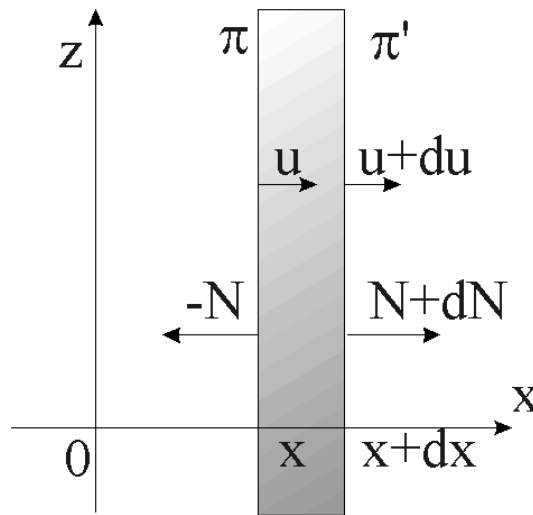


Figura 1.4: Propagazione delle onde longitudinali piane.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sarà l'accelerazione, da cui:

$$(\lambda + 2\mu) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot dx = \rho \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Da quest'ultima espressione può ricavarsi facilmente la più nota:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

che rappresenta l'equazione della propagazione longitudinale della perturbazione con velocità:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

ossia l'equazione delle onde longitudinali. Le costanti di *Lamè*⁴ intervengono nella definizione dell'entità delle deformazioni dovute a tensioni normali,

⁴Un mezzo elastico è caratterizzato attraverso parametri che esprimono il legame tra forze agenti e deformazioni. Tra le più note ed usate vi sono il modulo di *Young*, il rapporto di *Poisson*, il modulo di elasticità cubica.

Il modulo di *Young* E esprime il rapporto tra pressione ed accorciamento percentuale nella direzione della pressione agente su un campione del materiale; il rapporto di *Poisson* σ è una grandezza adimensionale che esprime, in un corpo sottoposto a pressione in una direzione preferenziale, il rapporto tra gli accorciamenti percentuali nella direzione ortogonale a quella della pressione e nella

in particolare per la *legge di Hooke*:

$$\sigma_{11} = N_1 = \lambda \cdot \delta v + 2\mu \cdot \delta x \sigma_{22} = N_2 = \lambda \cdot \delta v + 2\mu \cdot \delta y \sigma_{11} = N_3 = \lambda \cdot \delta v + 2\mu \cdot \delta z,$$

con $\delta v = \frac{\Delta v}{v} = \delta x + \delta y + \delta z$. Esse esprimono le tensioni normali N_i (considerando gli sforzi tangenziali nulli) in funzione delle caratteristiche del corpo. La propagazione avviene nella direzione dell'asse orizzontale ovvero coincide con la direzione di variazione della forza, ortogonalmente alla lastra di materiale tra i due piani.

Quale soluzione dell'equazione delle onde longitudinali può considerarsi direzione della pressione stessa; infine il modulo di elasticità cubica κ è pari al rapporto tra la *pressione idrostatica* (di intensità uguale in tutte le direzioni) agente su un volumetto di materiale e la dilatazione percentuale dello stesso volumetto (con segno cambiato).

Nei liquidi abbiamo $\sigma = 0.5$ e $E = 0$, mentre nei solidi molto rigidi il valore di σ è molto basso e tendente a zero (0.05 nelle rocce più dure). In generale le rocce hanno valori di E e di κ compresi tra $2 \cdot 10^{10}$ e $12 \cdot 10^{10}$ *newton/m.*.

Le tre costanti elastiche appena definite sono di grande importanza in quanto, attraverso la loro interdipendenza, permettono di caratterizzare un mezzo in termini delle cosiddette costanti di *Lamè* (λ, μ):

$$\begin{cases} E = \frac{\mu \cdot (3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \\ \sigma = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + \mu)} \\ \kappa = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \end{cases} \quad 0 < \sigma \leq 0.5 \quad (1.52)$$

Le velocità delle onde P ed S possono essere ricavate in termini di queste costanti, come segue:

$$\begin{cases} v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \end{cases} \quad (1.53)$$

dove con ρ si è indicata la densità del mezzo. Definendo un coefficiente $\gamma^2 = \frac{v_S^2}{v_P^2}$ si possono confrontare le velocità di propagazione delle due onde nei vari mezzi:

$$\gamma^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{0.5 - \sigma}{1 - \sigma},$$

ovvero $0 < \gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$, cioè v_S è compresa tra 0 (nei liquidi) ed il 70% della v_P nelle rocce più rigide.

una espressione del tipo $u = f(x - V_p \cdot t)$, purchè continua con le sue derivate prime e seconde.

Considerazioni analoghe permettono di ricavare l'espressione relativa alle onde trasversali.

1.2.3 Propagazione delle onde longitudinali sferiche

Le onde che si diffondono a partire da un punto nello spazio hanno un fronte d'onda curvo che tende a divenire localmente piano quando l'onda ha percorso grandi distanze. Infatti a grande distanza, la teoria delle onde piane può essere applicata in modo soddisfacente. D'altra parte la teoria delle onde piane non è in grado di spiegare certi fenomeni che si manifestano in corrispondenza dell'interfaccia tra mezzi con differenti proprietà elastiche, attraversati da un campo d'onda longitudinale. Analizziamo il caso particolare di fronti d'onda curvi, cilindrici e sferici, riferendoci, in primo luogo, ad un sistema di coordinate cilindrico (figura (1.5)).

Scegliamo l'asse zeta normale allo strato considerato. Le coordinate r , ϕ e

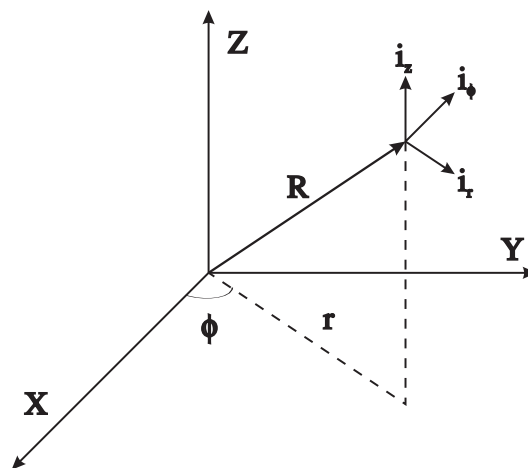


Figura 1.5: Sistema di riferimento polare cilindrico

z vengono definite nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\phi) \\ y = r \cdot \sin(\phi) \\ z = z. \end{cases} \quad (1.54)$$

con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\tan(\phi) = y/x$.

Le componenti di \mathbf{u} espresse nello stesso sistema di coordinate, saranno:

$$\mathbf{u}(r, \phi, z) = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\phi \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(r, z) \cdot \cos(\phi) \\ u(r, z) \cdot \sin(\phi) \\ v(r, z) \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

In questo modo u e v sono funzioni di (r, z) e ϕ e quindi il potenziale scalare Φ sarà a sua volta funzione di (r, z) e ϕ , così pure il potenziale vettore

$$\Psi(x, y, z) = [-\Psi \cos(\phi), \Psi \sin(\phi), 0].$$

che risulterà diretto lungo la direzione \mathbf{i}_ϕ . In coordinate cilindriche il gradiente di una funzione scalare viene riscritto come segue:

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \cdot \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \mathbf{i}_z, \quad (1.56)$$

mentre il rotore del potenziale vettoriale Ψ assume la forma:

$$\nabla \times \Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_r & \mathbf{i}_\phi & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi_r & \Psi_\phi & \Psi_z \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \phi} - \frac{\partial \Psi_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial \Psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \Psi_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial \Psi_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{i}_z. \quad (1.57)$$

Se il potenziale vettore Ψ fosse diretto, come nel caso in esame, esclusivamente lungo l'asse \mathbf{i}_ϕ , avremo che $\Psi(r, \phi, z) = [0, \Psi, 0]$ e quindi:

$$\nabla \times \Psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \mathbf{i}_r + \left(\frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \cdot \mathbf{i}_z. \quad (1.58)$$

Le relazioni che legano i versori del riferimento polare col riferimento cartesiano sono le seguenti:

$$\begin{cases} \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_x \cdot \cos(\phi) + \mathbf{i}_y \cdot \sin(\phi) \\ \mathbf{i}_\phi = -\mathbf{i}_x \cdot \sin(\phi) + \mathbf{i}_y \cdot \cos(\phi) \\ \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z, \end{cases} \quad (1.59)$$

che nel caso specifico portano all'espressione

$$\nabla \times \Psi = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \cos(\phi) \cdot \mathbf{i}_x - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \sin(\phi) \cdot \mathbf{i}_y + \left(\frac{\Psi}{r} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \cdot \mathbf{i}_z. \quad (1.60)$$

Sostituendo le espressioni di $-\nabla \Phi$ e $\nabla \times \Psi$ così ricavate nell'equazione (1.37) si ottengono le componenti di \mathbf{u} lungo \mathbf{i}_r e lungo \mathbf{i}_z :

$$\begin{aligned} u_r = u(r, z) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ u_z = v(r, z) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Per la divergenza ed il rotore di \mathbf{u} avremo le espressioni:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (1.62)$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}, \quad (1.63)$$

che sostituite rispettivamente nell'equazione (1.35) e nella (1.36) portano alle equazioni differenziali seguenti:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + k^2 \Phi = 0, \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + h^2 \Psi = 0, \quad (1.65)$$

ricordando che $\Psi(r, \phi, z) = [0, \Psi, 0] = \Psi \mathbf{i}_\phi$.

Risolviamo quest'equazione mediante il metodo di separazione delle variabili, scrivendo:

$$\Phi = R(r)Z(z), \quad (1.66)$$

con chiaro significato dei termini.

Sostituendo l'espressione (1.66) nell'equazione (1.64) e dividendo per il termine $R \cdot Z$ otteniamo:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0, \quad (1.67)$$

ovvero

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2. \quad (1.68)$$

Dal momento che il primo membro dipende solo da r ed il secondo solo da z , l'uguaglianza sarà possibile solo se entrambi sono costanti, ad esempio, $-\eta^2 \in \mathcal{R}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} = -\eta^2 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = (\eta^2 - k^2)Z. \end{cases} \quad (1.69)$$

Per la prima equazione delle (1.69) possiamo scrivere:

$$r^2 \cdot \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + R\eta^2 r^2 = 0. \quad (1.70)$$

Quest'equazione è un'equazione differenziale di *Bessel* del primo tipo e di ordine zero che ha soluzione limitata $R(r) = C_1 J_0(\eta r)$.

Per risolvere la seconda delle equazioni (1.69) proviamo ad utilizzare un'espressione particolare del tipo $Z(z) = e^{az}$, ottenendo la soluzione generale:

$$Z(z) = C'_1 e^{\left(\sqrt{\eta^2 - k^2} z\right)} + C'_2 e^{-\left(\sqrt{\eta^2 - k^2} z\right)}, \quad (1.71)$$

che resta limitata per $C'_2 = 0$, ovvero:

$$Z(z) = C'_1 e^{\left(\sqrt{\eta^2 - k^2} \cdot z\right)}.$$

In definitiva avremo che il potenziale scalare Φ potrà esprimersi come:

$$\Phi(r, z) = A e^{az} J_0(\eta r), \quad (1.72)$$

con $a = \sqrt{\eta^2 - k^2}$.

Per quanto riguarda il potenziale vettore, dobbiamo riferirci all'equazione (1.65); sostituendo Ψ con $R(r)Z(z)$ otteniamo:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + h^2. \quad (1.73)$$

Anche in questo caso dobbiamo eguagliare entrambi i membri di questa equazione ad una costante, ad esempio al termine $-\eta^2$, ottenendo:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\eta^2 - \frac{1}{r^2}\right) R = 0, \quad (1.74)$$

che è una funzione di *Bessel* di primo tipo e di prim'ordine con soluzione limitata $R(r) = C_2 J_1(\eta r)$. Il termine al secondo membro della (1.73) porta,

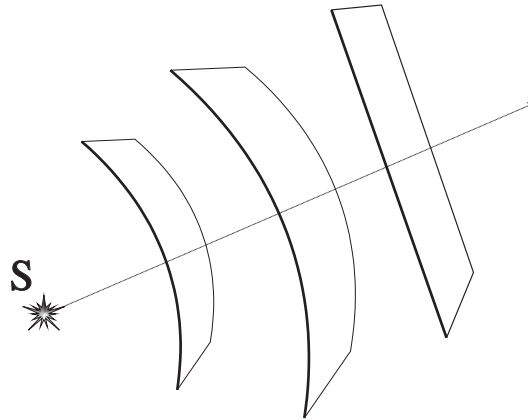


Figura 1.6: Per $|r| \rightarrow \infty$ il fronte d'onda sferico risulta localmente piano.

come abbiamo visto, ad un'espressione del tipo $Z(z) = C'_2 e^{(\eta^2 - h^2)z} = e^{bz}$. Per il potenziale Ψ avremo pertanto:

$$\Psi = -B e^{bz} J_1(\eta r), \quad (1.75)$$

con $b = \sqrt{a^2 - h^2}$. Se A e B sono entrambe funzioni di η le soluzioni possono essere integrate rispetto ad essa.

Questo modo di procedere è stato introdotto da *Sommerfeld* per trovare una soluzione a simmetria sferica per l'equazione d'onda. Un'onda sferica con potenziale scalare del tipo:

$$\Phi = \frac{1}{r} e^{jk \cdot r}, \quad (1.76)$$

può essere visto come la sovrapposizione di onde a simmetria cilindrica; ponendo

$$\Phi = \int_0^\infty e^{a(z)} J_0(\eta r) \frac{\eta d\eta}{a}. \quad (1.77)$$

che rappresenta una soluzione a simmetria sferica per l'equazione (1.64)⁵.

⁵Per una dettagliata dimostrazione: *J.C.d'Arnaud Gerkens*, *Foundation of Exploration Geophysics*, Elsevier, 1989.

Capitolo 2

Cenni sulla teoria hamiltoniana

Supponiamo di individuare la posizione di un corpo rigido (o di più corpi) in termini delle coordinate spaziali $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e della velocità $\dot{\mathbf{q}}$, con $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ [6]. Per questi oggetti l'energia cinetica viene espressa in forma quadratica rispetto alle componenti \dot{q}_i , nel modo seguente:

$$E_c = \sum_{i,k} A_{i,k}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_k;$$

mentre l'energia potenziale è una funzione della posizione e del tempo, del tipo

$$E_p = E_p(\mathbf{q}, t).$$

Il *principio di Hamilton* permette di definire un sistema conservativo in termini di stazionarietà del funzionale:

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} [E_c(\mathbf{q}, t) - E_p(\mathbf{q}, t)] \cdot dt, \quad (2.1)$$

ossia per $\Delta\mathcal{J} = 0$.

La funzione $L = E_c - E_p$ viene denominata *lagrangiana del sistema*. La stazionarietà del funzionale \mathcal{J} equivale, in termini dell'equazione di *Eulero-Lagrange*, alla soluzione del sistema di equazioni:

$$\frac{d}{dt} \frac{dE_c}{dq_i} - \frac{\partial(E_c - E_p)}{\partial q_i} = 0, \quad (2.2)$$

per $i = 1, 2, \dots, n$. Nella quale $E_c = 0$ per $\dot{q}_i = 0$ implica che $\frac{\partial E_p}{\partial q_i} = 0$, ed individua una possibile condizione di equilibrio del sistema (minimo di energia potenziale).

Nota la posizione del corpo (o dei corpi) agli istanti t_0 e t_1 , esistono numerose traiettorie che collegano i due punti spaziali ai diversi istanti; il principio di *Hamilton* stabilisce che per un sistema fisico, tra le innumerevoli possibilità vengono scelti percorsi che rendono $\Delta \mathcal{J} = 0$. Essendo note le posizioni degli oggetti agli istanti t_0 e t_1 non sono necessarie condizioni iniziali addizionali. Se E_c ed E_p sono stazionarie vi è sempre una condizione del tipo:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (2.3)$$

La costante del moto è:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L, \quad (2.4)$$

chiamata *hamiltoniana* del sistema: $\mathcal{H} = \text{costante}$ significa che il sistema è conservativo.

Effettuando il cambiamento di variabili:

$$(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow (\hat{q}_i, p_i) = \left(q_i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \quad (2.5)$$

Differenziando l'hamiltoniana rispetto alle nuove variabili, otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial \hat{q}_j} \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial q_i} \right) \\ \frac{\partial H}{\partial \hat{q}_i} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \hat{q}_i} + \frac{\partial H}{\partial \hat{q}_j} \frac{\partial \hat{q}_j}{\partial \hat{q}_i} \right) \end{cases} \quad (2.6)$$

nella quale $\frac{\partial \hat{q}_j}{\partial q_i} = \delta_{ij}$, $\frac{\partial \hat{q}_j}{\partial \hat{q}_i} = 0$.

Dall'espressione $H = \sum_{j=1}^N \dot{q}_j p_j - L$, segue che:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{q}_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \hat{q}_i} = \sum_{j=1}^N \dot{q}_j \frac{\partial p_j}{\partial \hat{q}_i}, \quad (2.7)$$

ossia $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, assumendo che la matrice di coefficienti $c_{ij} = \frac{\partial p_j}{\partial \hat{q}_i}$ sia *non-singolare*. Otteniamo inoltre:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{q}_i} = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(H - \sum_{j=1}^N \dot{q}_j p_j \right) = - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\dot{p}_i, \quad (2.8)$$

utilizzando l'equazione di *Eulero-Lagrange*. Il risultato rappresenta le cosiddette *equazioni di Hamilton*:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.9)$$

ovvero le equazioni del moto per un sistema conservativo di *variabili canoniche* p_i, q_i .

2.1 L'equazione delle corde vibranti

Assumiamo che l'energia potenziale di una corda sia proporzionale alla variazione della sua lunghezza, che in condizioni di riposo è pari ad l ; indichiamo con $y(x, t)$ lo spostamento della stessa dalla posizione di riposo (orizzontale). Esprimeremo l'energia potenziale nel modo seguente:

$$E_p = \hat{\mu} \int_0^l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - 1 \right] \cdot dx,$$

con $\hat{\mu}$ costante di proporzionalità (costante di *Hooke*) e $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ variazione differenziale della lunghezza della corda. L'energia cinetica può esprimersi come:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx,$$

con ρ densità della corda.

Il principio di *Hamilton* applicato a questo caso specifico agisce nel senso di rendere stazionario il funzionale:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \hat{\mu} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \right] \cdot dx dt. \quad (2.10)$$

La corda è vincolata ai suoi estremi e quindi $y(x, t) = 0$ per $x = 0$ e per $x = l$. Il funzionale \mathcal{J} dipende dalle due variabili indipendenti x e t ; l'equazione di *Eulero-Lagrange* si ottiene scrivendo:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{y}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial y}{\partial t} \right), \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(E_c - E_p)}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \hat{\mu} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} - 1 \right] \right\} \\ &= -\hat{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = -\hat{\mu} \cdot \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)}}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

In definitiva:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial y}{\partial t} \right) = - \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)}}.\quad (2.13)$$

Quest'equazione *non-lineare* può considerarsi *lineare* per $|\frac{dy}{dx}| \ll 1$ ovvero per variazioni verticali molto più piccole delle corrispondenti variazioni orizzontali, in modo tale da potere trascurare $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ rispetto all'unità; da ciò discende:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{\mu} \frac{\partial y}{\partial x} \right),\quad (2.14)$$

che, per $0 < x < l$, rappresenta l'equazione d'onda di velocità $v = \sqrt{\frac{\hat{\mu}}{\rho}}$. In generale :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r})}{\partial t^2} = v^2(\mathbf{r}) \cdot \nabla^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}).$$

2.2 Energia

In base ad una formulazione *hamiltoniana* dell'equazione d'onda possiamo definire la funzione di *Hamilton*, che indica l'energia dell'onda contenuta al tempo t entro il volume V :

$$H(t) = \int_V \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)^2 \right] \cdot dV = \int_V \mathcal{H} dV.\quad (2.15)$$

Attraverso il calcolo della *potenza* può essere ricavata l'equazione di continuità:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(t)}{\partial t} &= \int_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial P}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right] \cdot dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial P}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) \right] \cdot dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right] \cdot dV \\ &= \int_V (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV = \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{nd}S,\end{aligned}\quad (2.16)$$

avendo definito:

$$\mathbf{j} = \frac{\partial P}{\partial t} \cdot \nabla P,\quad (2.17)$$

con \mathbf{j} densità superficiale di potenza attraverso la frontiera ∂V che avvolge il volume V (figura (2.1)). La potenza per unità di area non è altro che la velocità alla quale l'energia viene trasferita al mezzo dal fronte d'onda per unità di area. Si stabilisce per convenzione che \mathbf{n} sia diretta verso l'esterno

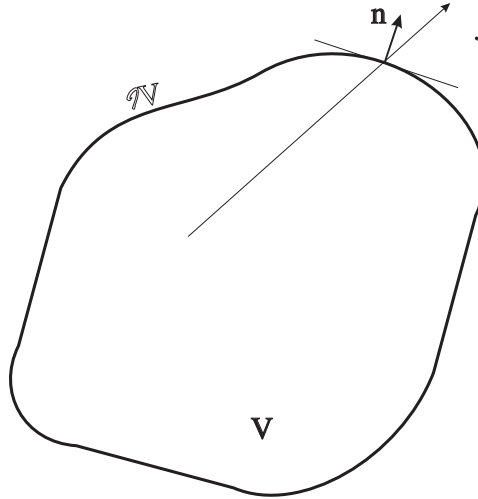


Figura 2.1: Flusso di energia attraverso il Volume.

del volume, quindi $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} > 0$ per il flusso di energia uscente dal volume V , ovvero:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial P}{\partial t} \cdot \nabla P \cdot \mathbf{n} > 0, \quad (2.18)$$

con le sorgenti interne al volume.

Ciò significa che il flusso di energia, generato da una sorgente interna al volume e riflesso dalla frontiera ∂V del dominio dovrà necessariamente avere $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} < 0$.

Il principio di conservazione dell'energia è soddisfatto alla frontiera dove vale $dH/dt = 0$. Affinchè possano realizzarsi condizioni assorbenti alla frontiera del volume è necessario che $dH/dt \leq 0$.

2.2.1 Velocità di gruppo e dispersione

Consideriamo un sistema governato dall'equazione d'onda con soluzione del tipo onda piana

$$e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

nella quale la pulsazione ω sia funzione della posizione \mathbf{r} , secondo la relazione di dispersione:

$$\omega = v|\mathbf{k}| \quad (2.19)$$

in generale avremo una relazione comunque complicata del tipo $\omega = \omega(\mathbf{k})$. La dipendenza di ω dal numero d'onda \mathbf{k} viene indicata *dispersione* per motivi che verranno chiariti in seguito. Inoltre consideriamo due onde piane propagantesi in direzione z , avremo:

$$g(\mathbf{r}, t) = e^{j(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} + e^{j(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \quad (2.20)$$

con $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$ e $\omega_2 = \omega(\mathbf{k}_2)$. Scriviamo \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 rispetto ad un valore di riferimento \mathbf{k}_0 :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 - \Delta \mathbf{k} \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_0 + \Delta \mathbf{k} \end{cases} \quad (2.21)$$

allo stesso modo, indicheremo:

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \Delta \omega \\ \omega_2 = \omega_0 + \Delta \omega, \end{cases} \quad (2.22)$$

con $\omega_0 = \omega(\mathbf{k}_0)$ e $\Delta \omega = \Delta k \frac{\partial \omega}{\partial k}$. Nel caso monodimensionale scriveremo:

$$g(z, t) = \left[e^{j(-\Delta \omega t + \Delta k z)} + e^{j(\Delta \omega t - \Delta k z)} \right] \cdot e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} = 2 \cdot \cos(\Delta \omega t - \Delta k z) \cdot e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}; \quad (2.23)$$

ovvero:

$$\mathcal{Re}\{g(z, t)\} = 2 \cos(\Delta \omega \cdot t - \Delta k \cdot z) \cdot \cos(\omega_0 t - k_0 z), \quad (2.24)$$

nella quale si individuano due oscillazioni, una veloce a pulsazione ω_0 ed una lenta a pulsazione $\Delta \omega$; ciò individua un'involuppo che si muove con velocità $\Delta \omega / \Delta k$. L'interferenza tra le due componenti d'onda produce una modulazione del segnale cosinusoidale, un pacchetto d'onda che viaggia ad una velocità

$$v_g = \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (2.25)$$

detta *velocità di gruppo*.

Lo stesso discorso può essere esteso al caso di sovrapposizione di onde piane con vettore d'onda compreso (con continuità) tra $k_o - \Delta k$ e $k_o + \Delta k$. In

questo caso avremo a che fare con un *pacchetto d'onda* esprimibile tramite l'integrale:

$$g^\diamond(z, t) = \mathcal{R}e \left\{ \int_{k_o - \Delta k}^{k_o + \Delta k} A(k) \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot z) \cdot dk \right\}, \quad (2.26)$$

nella quale ogni componenete ha ampiezza $A(k)$.

Ponendo $\Delta k \ll k_0$ per $k \in [k_o - \Delta k, k_o + \Delta k]$, può scriversi:

$$\omega(k) \simeq \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} \cdot (k - k_0) + \dots, \quad (2.27)$$

indicando con $v_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$ la velocità di gruppo calcolata al centro banda (ω_0, k_0) ; sostituendo nell'integrale avremo:

$$\begin{aligned} g^\diamond(z, t) &= \mathcal{R}e \left\{ A(k_0) \int_{k_o - \Delta k}^{k_o + \Delta k} e^{j\omega_0 t} e^{j[v_g(k-k_0)t - kz]} dk \right\} \\ &= \mathcal{R}e \left\{ A(k_0) e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{k_o - \Delta k}^{k_o + \Delta k} e^{j(v_g t - z)(k - k_0)} dk \right\} \\ &= \mathcal{R}e \left\{ A(k_0) e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \left[\frac{e^{j(v_g t - z)(k - k_0)}}{j(v_g t - z)} \right]_{k_o - \Delta k}^{k_o + \Delta k} \right\} \\ &= 2\Delta k \cdot A(k_0) \cdot \cos(\omega_0 t - k_0 z) \cdot \frac{\sin[(v_g t - z)\Delta k]}{(v_g t - z)\Delta k}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

che può essere riscritta come:

$$g^\diamond(z, t) = 2\Delta k \cdot A(k_0) \cdot \cos[k_0(z - v_f t)] \cdot \frac{\sin[\Delta k(z - v_g t)]}{\Delta k(z - v_g t)}. \quad (2.29)$$

Nell'equazione (2.29) $v_f = \frac{\omega}{k}$ è la velocità di fase, ossia la velocità della pulsazione veloce, mentre l'involuppo scorre con velocità pari alla velocità di gruppo. Nei mezzi non dispersivi $v_g = v_f$. Nei mezzi dispersivi si evidenziano i seguenti effetti:

- la velocità di fase risulta diversa per ciascuna componente frequenziale. Ciò significa che le diverse componenti frequenziali di un'onda si muovono a diverse velocità, cumulando dei ritardi le une rispetto alle altre e quindi mutando la fase relativa; ciò produce l'effetto di "sparpagliamento" dell'energia dell'onda noto come dispersione.
- In un mezzo dispersivo la velocità di gruppo v_g con la quale l'energia fluisce, differisce notevolmente dalla velocità di fase ($v_f \geq v_g$).
- In un mezzo *dissipativo* le modalità di attenuazione sono le stesse sia in un mezzo dispersivo che in uno non dispersivo; più in generale diremo che gli effetti dissipativi dipendono dalla frequenza.

Capitolo 3

Equazione d'onda nel dominio di Fourier

L'equazione scalare delle onde acustiche è esprimibile nella forma nota:

$$\frac{\partial^2 P(t; \mathbf{r})}{\partial t^2} = v^2 \cdot \nabla^2 P(t; \mathbf{r}) \quad (3.1)$$

sotto forma di equazione differenziale alle derivate parziali di second'ordine.

Per mezzi omogenei ($v = \text{costante}$) la soluzione dell'equazione d'onda può essere espressa, specificando le condizioni iniziali $P_0(\mathbf{r})$ e $\partial_t P_0(\mathbf{r})$, in termini di un'onde piana monocromatica. Una soluzione dell'equazione (3.1) può essere indicata nella forma:

$$P(t; \mathbf{r}) = \hat{P}_{\mathbf{k}}(t) \cdot e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z). \quad (3.2)$$

Sostituendo l'equazione (3.2) nella (3.1) si ottiene l'equazione differenziale ordinaria seguente:

$$\frac{d^2 \hat{P}_{\mathbf{k}}(t)}{dt^2} = -v^2 |\mathbf{k}|^2 \hat{P}_{\mathbf{k}}(t), \quad (3.3)$$

la cui soluzione generale

$$\hat{P}_{\mathbf{k}}(t) = A^+(\mathbf{k}) \cdot e^{j \cdot v |\mathbf{k}| t} + A^-(\mathbf{k}) \cdot e^{-j \cdot v |\mathbf{k}| t}, \quad (3.4)$$

individua due termini distinti per la propagazione. Valgono le espressioni

$$\begin{cases} \hat{P}_{\mathbf{k}}(0) = A^- + A^+ = \hat{P}_{\mathbf{k}}, \\ \dot{\hat{P}}_{\mathbf{k}}(0) = jv|\mathbf{k}|(A^- - A^+) = \hat{Q}_{\mathbf{k}}; \end{cases} \quad (3.5)$$

ossia

$$\begin{cases} A^+ = \frac{1}{2} \left[\hat{P}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{Q}_{\mathbf{k}}}{jv|\mathbf{k}|} \right], \\ A^- = \frac{1}{2} \left[\hat{P}_{\mathbf{k}} - \frac{\hat{Q}_{\mathbf{k}}}{jv|\mathbf{k}|} \right], \end{cases} \quad (3.6)$$

che può risciversi anche nel modo seguente:

$$A^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[\hat{P}_0(\mathbf{k}) \pm \frac{1}{jv \cdot |\mathbf{k}|} \frac{\partial \hat{P}_0(\mathbf{k})}{\partial t} \right]. \quad (3.7)$$

\hat{P}_0 e $\partial \hat{P}_0 / \partial t$ rappresentano rispettivamente la trasformata di *Fourier* della soluzione e quella della sua derivata temporale valutate all'istante iniziale, con $\omega = v\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = v|\mathbf{k}|$. Nell'elaborazione dei dati sismici è spesso conveniente distinguere le onde dirette verso il basso rispetto a quelle propagantesi verso l'alto (rispetto al riferimento sull'asse z , positivo verso il basso).

Un modo per ridurre gli effetti dovuti alle riflessioni multiple può essere ottenuto restringendo l'analisi alle sole onde propagantesi verticalmente verso il basso al crescere del tempo. La *fase* associata alla soluzione espressa attraverso le equazioni (3.2) e (3.4), complessivamente è pari a:

$$\phi^\pm(t; \mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm v|\mathbf{k}|t, \quad (3.8)$$

in modo da potere esprimere la soluzione generale nel modo seguente:

$$P(t; \mathbf{r}) = A^+ e^{j\phi^+} + A^- e^{j\phi^-}. \quad (3.9)$$

Il *fronte d'onda* può essere definito come il luogo dei punti dello spazio per i quali risulta soddisfatta la relazione:

$$\phi^\pm(t; \mathbf{r}) = \text{costante}, \quad (3.10)$$

che rappresenta il fascio di piani di equazione:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm v|\mathbf{k}|t = \text{costante}, \quad (3.11)$$

parametrizzato rispetto al tempo, con vettore $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ normale al piano π individuato per un \hat{t} fissato. Dall'equazione (3.11) può ricavarsi, derivando membro a membro rispetto al tempo, la relazione seguente:

$$\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mp v, \quad (3.12)$$

che permette di discriminare il verso di propagazione dell'onda viaggiante rispetto ad una particolare direzione. Se volessimo considerare le sole onde propagantesi in profondità, nella direzione delle z crescenti (per x e y fissate) al crescere del tempo, dovremo esigere $dz/dt > 0$. Soddisfare la relazione (3.12) significa porre:

$$k_z \cdot \frac{dz}{dt} = \text{sgn}(k_z) \cdot v|\mathbf{k}|. \quad (3.13)$$

In definitiva l'onda viaggiante in profondità potrà esprimersi in due modi differenti:

$$P^+(t; \mathbf{r}) = A^+ \cdot e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + v|\mathbf{k}|t)} \quad k_z < 0, \quad A^- = 0; \quad (3.14)$$

$$P^-(t; \mathbf{r}) = A^- \cdot e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - v|\mathbf{k}|t)} \quad k_z > 0, \quad A^+ = 0. \quad (3.15)$$

Le due precedenti relazioni possono scriversi in forma compatta come segue:

$$P(t; \mathbf{r}) = \hat{P}_{\mathbf{k}}(0) \cdot e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \text{sgn}(k_z)v|\mathbf{k}|t)}, \quad (3.16)$$

che descrive la soluzione caratteristica dell'onda che si propaga verso il basso. Il termine:

$$\hat{P}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{P}_{\mathbf{k}}(0) \cdot e^{-j[\text{sgn}(k_z)v|\mathbf{k}|t]} \quad (3.17)$$

è soluzione dell'equazione parassiale

$$\frac{\partial \hat{P}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = -jvk_z \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k_z^2}} \hat{P}_{\mathbf{k}}(t), \quad \kappa^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad (3.18)$$

che descrive la propagazione delle componenti d'onda piana in profondità, verso le z crescenti al crescere del tempo.

Ogni componente d'onda piana con $k_z < 0$ si muove con verso concorde a quello del suo vettore d'onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$; le componenti d'onda piana con $k_z > 0$, invece, viaggiano in direzione opposta al loro vettore d'onda [5].

L'equazione (3.18) può essere formalmente espressa nel dominio spazio-temporale in modo seguente:

$$\frac{\partial P(t; \mathbf{r})}{\partial t} = -v \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ jk_z \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k_z^2}} \mathcal{F}\{P(t; \mathbf{r})\} \right\}, \quad (3.19)$$

dove $\mathcal{F}\{\cdot\}$ ed $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ rappresentano la trasformata di *Fourier* spaziale (dal dominio (x, z) al dominio (k_x, k_z)) e la sua inversa. Ciò significa che per calcolare la derivata prima temporale del campo di pressione sono necessari tre passi:

- applicazione della trasformata veloce bidimensionale di *Fourier* (*FFT*) del campo $P(t; \mathbf{r})$ nelle dimensioni spaziali x e z ;
- moltiplicazione per il termine $jk_z \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k_z^2}}$;
- antitrasformazione (FFT^{-1}).

Dalla relazione precedente, inoltre, possono dedursi le derivate d'ordine superiore, come:

$$\frac{\partial^2 P(t; \mathbf{r})}{\partial t^2} = v \cdot \mathcal{F}^{-1} \left\{ jk_z \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k_z^2}} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial P(t; \mathbf{r})}{\partial t} \right\} \right\}. \quad (3.20)$$

Poichè deve essere soddisfatta la condizione di stabilità $|\frac{v \cdot (\kappa^2)}{\omega^2}| \leq 1$, avremo propagazione all'interno di un cono attorno all'asse ω nello spazio di *Fourier* (figura (??)).

3.1 Approssimazione parassiale dell'equazione d'onda

L'espressione

$$\omega^2 = v^2 \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = v^2 \cdot |\mathbf{k}|^2, \quad (3.21)$$

rappresenta la cosiddetta *relazione di dispersione* e regola la dipendenza tra le frequenze spaziali k_x, k_y, k_z e la frequenza temporale ω .

La relazione di dispersione è una funzione reale ¹ che può essere espressa come segue:

$$\omega = v \cdot k_z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_z^2}\right)} \quad (3.22)$$

ovvero

$$k_z = \frac{\omega}{v} \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{v^2 \cdot (k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2}\right]} \quad (3.23)$$

per la quale si hanno problemi di stabilità se:

$$\left| \frac{v^2 \cdot (k_x^2 + k_y^2)}{\omega^2} \right| > 1 \quad (3.24)$$

perchè k_z diventa immaginario ($k_z = j \cdot |k_z|$) e quindi l'esponenziale diventa reale e può divergere ².

A partire dall'espressione ³ (3.23), evidenziando il termine adimensionale:

$$\frac{v \cdot k_z}{\omega} = \left[1 - \frac{v^2 \cdot \kappa^2}{\omega^2}\right]^{1/2}, \quad (3.25)$$

adatto ad una estrapolazione in profondità, oppure in modo equivalente:

$$\frac{\omega}{v k_z} = \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k_z^2}}, \quad (3.26)$$

si ricavano le cosiddette *approssimazioni parassiali*. Espandendo con serie di *Taylor* la radice quadrata che compare nella definizione di k_z oppure come espresso nella trattazione seguente (nel caso bidimensionale) utilizzando l'espansione in frazioni continue, si ottiene:

$$\frac{\omega}{v \cdot k_z} = 1 + o\left(\left|\frac{\kappa}{k_z}\right|^2\right) = a_1, \quad (3.27)$$

$$\frac{\omega}{v \cdot k_z} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa^2}{k_z^2} + o\left(\left|\frac{\kappa}{k_z}\right|^4\right) = a_2, \quad (3.28)$$

$$\frac{\omega}{v \cdot k_z} = \frac{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\kappa^2}{k_z^2}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\kappa^2}{k_z^2}} + o\left(\left|\frac{\kappa}{k_z}\right|^6\right) = a_3. \quad (3.29)$$

¹Limitatamente al caso in cui ω e k_z abbiano lo stesso segno.

²La soluzione dell'equazione d'onda è costituita da due termini contenenti termini esponenziali con esponenti coniugati; se $k_z \in \Re$ uno dei due termini esponenziali potrà divergere per $t \rightarrow 0$.

³Segno positivo per la propagazione verso il basso.

Possiamo anche esprimere una relazione generale rispetto all'ordine $i - mo$ utilizzando una relazione ricorsiva che porta all'approssimazione della radice nel modo seguente:

$$\frac{\omega}{vk_z} = a_i = 1 + \frac{\frac{\kappa^2}{k_z^2}}{1 + a_{i-1}} + o\left(\left|\frac{\kappa}{k_z}\right|^{2j}\right), \quad a_1 = 1, \quad (3.30)$$

detta approssimazione parassiale di ordine i . Le equazioni relative a tali approssimazioni sono nell'ordine:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (3.31)$$

$$2v \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} - v \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.32)$$

$$-\frac{\partial^3 P}{\partial t \partial z^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^3 P}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 P}{\partial t \partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 P}{\partial z^3} - \frac{3}{4} v \left(\frac{\partial^3 P}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 P}{\partial z \partial y^2} \right) = 0 \quad (3.33)$$

È importante sottolineare che le approssimazioni di ordine elevato basate sull'espansione in frazioni continue della radice quadrata portano a schemi differenziali instabili [4].

Bibliografia

- [1] Norinelli A. *Elementi di geofisica applicata*. Patron Editore, 1982.
- [2] Tikhonov A.N. Samarskij A.A. *Equazioni della fisica matematica*. MIR Publishers, Moscow, 1981.
- [3] Tsvankin Ilya. *Seismic Wavefields in Layered Media*. Center of Wave Phenomena - Colorado School of Mines, Samizdat Press, 1995.
- [4] Claerbaut J. *Imaging the earth interior*. Blackwell Scientific Publications, 1985.
- [5] Gazdag J. and Sguazzero P. *Modeling of the acoustic wave equation with transform methods*. Reprinted of Geophysics, 46, 854-859, June 1980.
- [6] Keener P. J. *Principles of Applied Mathematics*. Addison Wesley Publishing Company, 1988.
- [7] Scales J.A. and Smith M.L. *Introductory Geophysical Inverse Theory*. Center of Wave Phenomena - Colorado School of Mines, Samizdat Press, 1994.
- [8] D'Arnaud Gerkens J.C. *Foundation of Exploration Geophysics*. Elsevier, 1989.